مجلة البحوث المالية والتجارية
المجلد (٢٢) – العدد الرابع – أكتوبر ٢٠٢١

# نموذج الانحدار مُتعدد الحدود كعلاج للمشاكل القياسية
# "دراسة تطبيقية على العلاقة بين معدل النمو الاقتصادي ومعدل التضخم في الاقتصاد المصري"

# Polynomial Regression Model as A Treatment for Standard Problems
# "An applied study on the relationship between the rate of economic growth and the rate of inflation in the Egyptian economy"

دكتور
**فاروق فتحي السيد الجزار**
أستاذ مساعد بقسم الاقتصاد والمالية العامة
كلية التجارة – جامعة طنطا

دكتور
**عبد الرحيم عوض بسيوني**
دكتوراه الإحصاء التطبيقي
كلية التجارة – جامعة طنطا

دكتور
**أدهم محمد السيد البرماوي**
مدرس الاقتصاد والمالية العامة بالمعهد العالي للإدارة وتكنولوجيا المعلومات بكفر الشيخ

رابط المجلة: https://jsst.journals.ekb.eg/

**المُلخص:**

**هذه الورقة تدرس استخدام نموذج الانحدار مُتعدد الحدود Polynomial Regression Model في تقدير العلاقة بين مُعدل التضخم ومُعدل نمو الناتج المحلي الإجمالي، وتحديد نُقطة الانقلاب التي بعدها تتحول العلاقة بينهم من إيجابية إلى سلبية، وتحديد المشاكل القياسية بنموذج الانحدار مُتعدد الحدود وتحديد ما إذا كان لهُ دور في التخلص من المشاكل القياسية الخاصة بالانحدار الخطي العام أم لا، وذلك على سلسلة زمنية من (١٩٧٥ – ٢٠١٨) على نموذج يتكون من المُتغير التابع ومُعدل النمو الاقتصادي (Y) والمتغيرات المستقلة هي مُعدل التضخم ($X_1$) وسعر الفائدة الحقيقي ($X_2$)، وتوصلت الدراسة إلى أن العلاقة بين التضخم ومُعدل النمو الاقتصادي غير خطية، وإن انسب علاقة رياضية بينهُم هي العلاقة التربيعية وكانت العلاقة في بادئ الأمر بين التضخم ومُعدل النمو الاقتصادي إيجابية حتى نقطة الانقلاب وهي (٩.٢٨٪) بعدها تحولت العلاقة إلى سلبية وبالتالي نقطة الانقلاب هي (٥.٦٨٪، ٩.٢٨٪)، كما تبين خلو نموذج الانحدار مُتعدد الحدود من جميع المشاكل القياسية الخاصة بنماذج الانحدار.**

**كلمات مفتاحية: الانحدار مُتعدد الحدود، معدل نمو الناتج المحلي الإجمالي، معدل التضخم، نقطة الانقلاب.**

## Abstract:

**This paper studies using a polynomial regression model to estimate the relationship between the rate of inflation and the rate of GDP growth and to determine the inflation threshold after which the inflation relationship shifts from positive to negative. to identify the standard problems of the polynomial regression model and determine whether it plays a role in eliminating the standard problems of general linear regression on time series (1975-2018) the dependent variable model in which the rate of GDP (Y) growth and dependent variables are inflation rate ($X_1$) and the real interest rate ($X_2$) the Study found that the relationship between inflation and rate of GDP growth is nonlinear and the most mathematically relevant is the quadratic relationship initially, the relationship was positive to the inflation threshold (9.28%) which then turned negative. and therefore, of inflation threshold (5.68%, 9.28%). it also showed that a polynomial regression model has no standard problems with regression model.**

**Keywords: Polynomial Regression, Rate of GDP Growth, Inflation Rate, Threshold.**

## ١/ ١مقدمة:

الانحدار هو أداة إحصائية تقوم ببناء نموذج إحصائي لتقدير العلاقة بين متغير كمي واحد وهو المتغير التابع ومتغير أخر أو عدة متغيرات مستقلة، مكونة بذلك معادلة توضح من خلالها طبيعة العلاقة بين هذه المتغيرات.

ينقسم الانحدار إلى انحدار خطي "Linear Regression" وانحدار غير الخطي "Nonlinear Regression"، ففي حالة الانحدار الخطي تظهر المتغيرات والمعاملات بأس مساوي للواحد، بينما تظهر المتغيرات والمعاملات بأسس مختلفة أو على هيئة لوغاريتمية أو متعددة الحدود "Polynomials" وغيرها من الأنواع التي تختلف عن الانحدار الخطي، وعندما تكون العلاقة بين متغير تابع ومتغير مستقل واحد فالانحدار يكون بسيط، إما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من متغير واحد فالانحدار يكون خطي متعدد.

والانحدار الخطي المتعدد هو دراسة لعلاقة بين متغير تابع ($y_i$) وأكثر من متغير مستقل ($x_i$) بواسطة معادلة رياضية تسمى نموذج الانحدار الخطي المتعدد، ومن الضروري التفرقة بين نوعين من العلاقات التي تربط بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة وهما العلاقات الإحصائية و العلاقات الرياضية، ويمكن التعبير بالعلاقة الإحصائية بـ $y_i = f(x_i)$، وهذا يعني أن قيمة ($y_i$) تعتمد على قيمة ($x_i$) اعتماداً كلياً وهذا غير معقول من الناحية الإحصائية أو العملية، فهناك متغيرات أخرى تؤثر في المتغير التابع ($y_i$) لم تدرج ضمن نموذج الانحدار مما أدى إلى ظهور عنصر جديد في معادلة الانحدار وهو عنصر الخطأ العشوائي ($e_i$) والذي يجب التعامل معه بحذر شديد، لأنه مصدر كل مشاكل الانحدار بأنواعه وعند تقدير المعلمات في نموذج الانحدار الخطي فإن أفضل الطرق للتقدير هي طريقة المربعات الصغرى العادية (Ordinary Least Square)، وتقوم هذه الطريقة على أساس مجموعة من الافتراضات المرتبطة بعنصر الخطأ العشوائي.

لا شك أن هذه الافتراضات المرتبطة بالخطأ العشوائي قد تتوافر في الواقع أو لا تتوافر، ففي حالة توافرها تكون طريقة المربعات الصغرى هي الطريقة الملاءمة في قياس العلاقات الاقتصادية محل الاهتمام. أما في حالة عدم توافرها فإنَ طريقة المربعات الصغرى لا تصبح هي الطريقة المُلاءمة لتقدير معلمات العلاقات الاقتصادية ويتعين البحث عن طُرق قياسية أخرى أكثر ملاءمة.

وفي حالة إسقاط إحدى فروض طريقة المربعات الصغرى تظهر العديد من المشاكل القياسية التي تجعل من هذه الطريقة أسلوب غير ملاءم لتقدير العلاقات الاقتصادية بين المتغيرات ومن

المشاكل القياسية مشكلة عدم ثبات التباين (Heteroscedasticity)، مشكلة الازدواج الخطي (Multicollinearity)، مُشكلة الارتباط الذاتي (Autocorrelation).

### ١/١/١ مُشكلة الدراسة:

من الناحية الإحصائية انصب الاهتمام في السنوات الأخيرة على استخدام أسلوب القياس الاقتصادي كأحد أساليب التحليل الكمي في معالجة المشاكل التي تشخصها النظرية الاقتصادية وفي رسم الخطط الاقتصادية وصياغة القرارات التخطيطية بعد أن أصبحت الفرضيات النظرية تصاغ بشكل معادلات قابلة للقياس والاختبار بواسطة الطرق الإحصائية المُتمثلة في نماذج الانحدار، حيث يُعد تحليل الانحدار سواءً كان بسيط أو متعدد من الأساليب الإحصائية واسعة الاستخدام، والذي يُستخدم لصياغة معادلات رياضية تعبر عن العلاقة بين المتغيرات وتعمل هذه المعادلة للتنبؤ بالقيم المستقبلية للبيانات تحت الدراسة. وتعتمد دقة هذه المعادلة على توافر بعض الفروض وتعتبر المشاكل القياسية أحد نتائج إسقاط هذه الفروض المرتبطة بالخطأ العشوائي ومع وجود هذه المشاكل فإن المعلمات المقدرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى تتصف بعدم الكفاءة وإن كانت تتصف بعدم التحيز والاتساق وبالتالي ينعكس ذلك على مصداقيتها في عملية التنبؤ. وهنا تظهر مشكلة البحث بظهور المشاكل القياسية في نموذج الانحدار وكيفية التعامل معها وحيث أن نموذج الانحدار متعدد الحدود "Polynomial Regression"، أحد صور الانحدار سوف نستعرض كيفية تأثير هذه المشاكل عليهِ وهل الطرق التقليدية تُعالج هذه المشاكل أم نموذج الانحدار المتعدد يعالج مثل هذه المشاكل باختلاف الشكل الذي يأخذه النموذج متعدد الحدود.

وعلي الجانب الاقتصادي تظهر مشكلة الدراسة في التساؤلات التالية:

١- ما هي طبيعة العلاقة المثلى بين معدل التضخم والنمو الاقتصادي؟

٢- ما هي معدلات التضخم التي تحفز النمو الاقتصادي؟

### ٢/١/١ هدف الدراسة:

تتمثل الأهداف الإحصائية للدراسة في النقاط الآتية:

١- استخدام نموذج الانحدار متعدد الحدود "Polynomial Regression" في تقدير العلاقة بين معدل التضخم ومعدل النمو الاقتصادي متمثلاً في معدل نمو الناتج المحلي الإجمالي.

٢- تقدير نقطة الانقلاب التي بعدها يتحول تأثير مُعدل تضخم على مُعدل النمو الاقتصادي من تأثير إيجابي إلى سلبي.

٣- المشاكل القياسية في نموذج الانحدار مُتعدد الحدود وهل استخدام هذا النموذج له دور في التخلص من المشاكل القياسية الخاصة بنموذج الانحدار العام.

**بينما تتلخص الأهداف الاقتصادية في الاتي:**

**١- تحديد الشكل الأمثل للعلاقة بين معدل التضخم ومعدل النمو الاقتصادي في مصر.**

**٢- تحديد معدلات التضخم المثلى التي تحفز النمو الاقتصادي.**

### ١/١/٣ أهمية الدراسة:

**تكمُن الأهمية الإحصائية للدراسة إلى أن كثير من الباحثين كان يفترض خطية العلاقة بين المتغيرات دون التأكد من صحة ذلك مما يُعرض النموذج للمشاكل القياسية ومن هُنا بدء الاهتمام بتحديد الصيغة الرياضية المُناسبة قبل تقدير العلاقة ثم التطرق لنوع من أنواع الانحدار الخطي العام وهو نموذج الانحدار المتعدد الحدود " Polynomial Regression " وتحديد مدى تأثير المشاكل القياسية فيه وما إذا كان له دور في التخلص من تلك المشاكل أم لا؟**

**أما على الجانب الاقتصادي، ترجع أهمية البحث في تحديد الشكل الأمثل للعلاقة بين معدل التضخم والنمو الاقتصادي، بالإضافة إلى تحديد معدلات التضخم المثلى التي تحفز النمو الاقتصادي.**

### ١/١/٤ حدود الدراسة:

**سلسلة زمنية من (١٩٧٥ – ٢٠١٨) بيانات سنوية لجمهورية مصر العربية لكل من معدل النمو الناتج المحلي الإجمالي كمؤشر للنمو الاقتصادي كمتغير تابع ومعدل التضخم وسعر الفائدة كمتغيرات مُستقلة.**

## ١/٢ التطور النظري للعلاقة بين معدل التضخم ومعدل النمو الاقتصادي:

**لا يوجد سوى عدد قليل من الأعمال النظرية حول تأثير التضخم على النمو الاقتصادي (Oikawa and Ueda, 2018) منذ عمل توبين الرائد (١٩٦٥) ظلت العلاقة بين التضخم والنمو الاقتصادي محل نقاش مستمر في أبحاث الاقتصاد الكلى، وتظهر النماذج النظرية المبكرة أن تأثير التضخم على الاستثمار الرأسمالي والنمو الاقتصادي يعتمد على كيفية إدخال رأس المال في النموذج وعلى وجه التحديد فإن التضخم إيجابي التأثير على النمو كما في توبين ١٩٦٥. حيث رأس المال هو بديل للاستثمار رأس المال ويعتبر التضخم سلبي التأثير على النمو كما في (Stockman, 1981) حيث يخضع الاستثمار الرأسمالي لقيود الدفع النقدي مقدماً أو بشكل مستقل كما في (Sidrauski, 1967) حيث يدخل رأس المال في دالة المنفعة المرتبطة باستثمار رأس المال والنمو الاقتصادي (Hung, 2017) واستناداً إلى دراسات تجريبية مختلفة تشير إلى التضخم وعدم اليقين بشأن التضخم يمكن أن يكون لهما تأثير إيجابي أو سلبي على نمو الاقتصاد.**

حيث يمكن للتضخم أن يزيد من تكلفة رأس المال ويقلل من تراكم رأس المال ويقلل من إنتاجيته وبالتالي تثبيط النمو على المدى الطويل (ديجريجوريو، ١٩٩٣).

من ناحية أخرى كما سبق ذكرها يجادل (توبين، ١٩٦٥) بأن ارتفاع التضخم المتوقع ممكن أن يحدث زيادة في رأس المال لكل فرد وبالتالي من الممكن ملاحظة علاقة إيجابية بين المتغيرين نتيجة قيام الأسر بتحويل أصولها إلى أشكال أكثر إنتاجية نحو تحقيق رأس المال الحقيقي (Baharumshah, et al., 2016) هناك أيضاً مجموعة كبيرة من الادبيات التي توضح العلاقة السلبية بين التضخم والنمو الاقتصادي وهذا يعنى أنه عندما يصبح التضخم مرتفعاً للغاية فهو يقلل بشكل كبير من نمو الإنتاج، أما فيما يتعلق بعدم اليقين بشأن التضخم فيجادل (فريدمان، ١٩٧٧) أن المزيد من التباين نتيجة أي زيادة في متوسط التضخم من شأنه أن يقلل من فعالية آلية الأسعار لتنسيق الأنشطة الاقتصادية والحد من معدل نمو الناتج ويؤكد على ذلك (بول، ١٩٩٢)، (Baharumshah, et al., 2016) ويعدل معدل النمو المرتفع المستدام وانخفاض التضخم الهدفين الرئيسيين لغالبية سياسات الاقتصاد الكلى، إن استقرار الأسعار هو عامل رئيسي في تحديد معدل نمو الاقتصاد ومن ثم تنفذ البنوك المركزية للكثير من الدول سياسات نقدية للحفاظ على معدل التضخم عن المعدل المرغوب حيث التضخم المرتفع للغاية يؤثر على الاقتصاد بشكل جذري وأيضاً هناك أدلة على أن التضخم المعتدل يؤدى أيضاً إلى إبطاء النمو بالإضافة إلى ذلك فإن تكلفة خوض التضخم إلى صفر أعلى من المنفعة. ويعتبر فيشر (١٩٩٣) من أوائل الذين حددوا إمكانية وجود علاقة غير خطية بين التضخم والنمو ووضح أن التضخم يساعد النمو الاقتصادي عندما يكون أقل من قيمة عتبة معينة ويكون له تأثير سلبي إذا كان أعلى من مستوى العتبة.

وأظهر ساريل (١٩٩٦) وجود نقطة انقلاب وهي ٨٪، وحدد جوش وفيلبس (١٩٩٨) تأثير عتبة أقل بكثير بمعدل تضخم ٢,٥٪ سنوياً وأيضاً حسب دراسة خان وصهانجي (٢٠٠١) فإن العتبة تكون من ١ – ٣٪ للبلدان الصناعية و١١ – ١٢٪ بالنسبة للدول النامية، وزعموا أن التضخم يعيق النمو الاقتصادي بشكل كبير بعد هذا المستوى (Vinayagathasan, 2013).

## ١/٣ تطور الأدبيات الاقتصادية والإحصائية لعلاقة معدل التضخم بمعدل النمو الاقتصادي

تعددت الدراسات السابقة التي أجريت على تحديد العلاقة بين التضخم والنمو الاقتصادي فهناك بعض الدراسات التي اكتفت بالتضخم باعتباره العامل الوحيد المؤثر في النمو الاقتصادي، في حين أن هناك دراسات أضافت متغيرات أخرى، في حين اختلفت الدراسات في تحديد نقطة

الانقلاب وهي النقطة التي بعدها تتحول العلاقة بين معدل التضخم ومعدل الناتج المحلي الإجمالي من إيجابية إلى سلبية. ففي دراسة (Valdovinos, 2003) وهي عن التضخم والنمو الاقتصادي في الأجل الطويل وتناقش هذه الدراسة افتراضية الارتباط السلبي طويل الأجل بين معدل النمو الاقتصادي ومستوى التضخم، وقد توصلت هذه الدراسة إلى وجود علاقة سلبية واضحة في المدى الطويل باستخدام (Baxter and King Filter).

في حين قامت دراسة (Mubarik, 2005) بتطبيق دراسة قياسية على باكستان لإيجاد العلاقة بين التضخم والنمو الاقتصادي، وذلك باستخدام بيانات سنوية (١٩٧٣ – ٢٠٠٥) للمتغيرات التضخم ومعدل النمو السكاني ومعدل الاستثمار كمتغيرات مفسرة لنمو الناتج المحلي الحقيقي، وذلك باستخدام اختبار سببية جرانجر وبنموذج خان وصنهاجي لتقدير العلاقة غير الخطية بين التضخم والنمو الاقتصادي، ومن خلال هذا النموذج توصلت الدراسة إلى أن مستوى عتبة التضخم (نقطة الانقلاب) في حدود ٩٪، أي تكون العلاقة عكسية فوق هذا المعدل بينما تحت ٩٪ يكون التضخم مؤاتياً للنمو الاقتصادي.

وعلى جانب أخر قامت دراسة (Kheir Eldin, H And Abou Ali,H, 2008) بتناول العلاقة بين التضخم والنمو الاقتصادي في مصر باستخدام نموذج العتبة غير الخطي وتم الاعتماد على البيانات السنوية خلال فترتين فرعيتين الأولى من (١٩٨١– ١٩٩١) والثانية من (١٩٩١ – ٢٠٠٦) الخاص بمتغير الناتج المحلي الإجمالي كمتغير تابع ومتغيرات الأنفاق الحكومي وتراكم رأس المال الثابت والقروض البنكية الموجهة للقطاع الخاص والواردات وصادرات السلع والخدمات، وكل هذه المتغيرات كنسبة من الناتج المحلي الإجمالي بالإضافة إلى متغير التضخم كمتغيرات مفسرة، وتبين بعد تقدير العلاقة بين التضخم والنمو الاقتصادي لكل فترة بنموذج العتبة (TR) إن لهما نفس مستوى عتبة التضخم في حدود ١٥٪ وإن كلا الفترتين تبين أن التضخم المرتفع الذي يتخطى عتبة التضخم يؤثر سلباً على النمو الاقتصادي. كما اقترحت الدراسة على البنك المركزي استهداف معدلات تضخم في نطاق المجال ٩٪ – ١٢٪.

بينما قامت دراسة (Hasanove, 2010) باستخدام بيانات سنوية لكل من الناتج المحلي الإجمالي الحقيقي (GDP) ومؤشر أسعار الاستهلاك (CPI) من أجل التحقق من إذا كان هناك تأثير لعتبة التضخم على النمو الاقتصادي خلال الفترة (٢٠٠١ – ٢٠٠٩) لأذربيجان باستخدام نموذج عتبة التضخم ذو الانتقال الفوري (TR) وتوصلت الدراسة إلى وجود علاقة غير خطية بين التضخم ومعدل النمو الاقتصادي ومستوى عتبة التضخم (نقطة الانقلاب) ١٣٪. في حين تناولت دراسة (Bittencourt, 2011) العلاقة بين التضخم والنمو الاقتصادي في أمريكا اللاتينية

تحديداً في أربعة دول التي عانت من ارتفاع معدلات التضخم في الثمانينات وأوائل التسعينات من القرن الماضي، هذه الدراسة تغطى الفترة الزمنية من ١٩٧٠ إلى ٢٠٠٧، وتم استخدام تحليل (Panel Time-Series)، وقد توصلت هذه الدراسة إلى وجود أدلة غير مؤكدة تشير إلى أن التضخم كان له تأثير عكسي على النمو في المنطقة مما يعكس بوضوح تأثير التكاليف المرتبطة للتضخم على النشاط الاقتصادي في المنطقة حيث التضخم المفرط قد عوض بوضوح تأثير (Mundell-Tobin) وبالتالي التكاليف المرتفعة للتضخم على النشاط الاقتصادي.

تبع ذلك دراسة (Vinayagathasan, 2013) بدراسة العلاقة بين التضخم والنمو الاقتصادي باستخدام (A dynamic model threshold analysis) على مجموعة من دول الاقتصاديات الآسيوية، وتبحث هذه الدراسة عن وجود مستوى عتبة للتضخم لتوضيح العلاقة غير الخطية بين التضخم والنمو على مجموعة من ٣٢ دولة آسيوية خلال الفترة من ١٩٨٠ – ٢٠٠٩، وقد وتوصلت هذه الدراسة إلى أن عتبة التضخم تبلغ ٥,٤٣٪ عند مستوى معنوية ١٪ حيث التضخم الأعلى من ٥,٤٣٪ يضر بالنمو الاقتصادي والتضخم الأقل من ٥,٤٣٪ ليس له تأثير.

وعلى صعيد أخر تناولت دراسة (Baglan and yolda, 2014) العلاقة بين التضخم ومعدل النمو الاقتصادي من خلال التطبيق على ٩٢ دولة نامية خلال الفترة من ١٩٧٥ حتى ٢٠٠٤ باستخدام منهجية Semi – Parametric Panel Data، وتم التوصل إلى أن التضخم الأعلى من ١٢٪ يؤدي إلى تخفيض مُعدلات النمو. بينما قامت دراسة (Eggoh and Khan, 2014) بتناول العلاقة غير الخطية بين التضخم والنمو الاقتصادي، وذلك باستخدام Panel Data على مجموعة من الاقتصاديات النامية والمتطورة باستخدام GMM (PSTR)، وقد توصلت هذه الدراسة إلى تأكيد وجود العلاقة غير الخطية بين التضخم والنمو الاقتصادي في إيطاليا مع وجود عدة عتبات للتضخم وتم استخدام مجموعة من المتغيرات الحاكمة الأخرى في هذه الدراسة مثل الانفتاح التجاري، والنفقات الحكومية والتراكم الرأسمالي والتنمية المالية بالإضافة إلى النمو الاقتصادي.

في حين قامت دراسة (Thanh, 2015) باختبار فرضية العلاقة غير الخطية بين التضخم والنمو الاقتصادي خلال الفترة من ١٩٨٠ – ٢٠١١ على بلدان دول جنوب شرق آسيا (S ASEAN–) باستخدام نموذج الانحدار السلس (PSTR)، وذلك لتقدير عتبة التضخم وتأثيراتها على النمو الاقتصادي، وتوصلت هذه الدراسة إلى أن هناك علاقة سلبية ذات دلالة إحصائية بين التضخم والنمو لمعدلات التضخم فوق مستوى عتبة ٧,٨٤٪ والتي بعدها يبدأ

التضخم في إعاقة النمو الاقتصادي في الدول محل الدراسة، وتوصلت الدراسة أيضاً إلى أن البنوك المركزية في دول الأسيان يمكنها تحسين النمو الاقتصادي عن طريق خفض التضخم عندما يكون أعلى أو بالقرب من العتبات المقدرة ويمكن اعتبار مستوى عتبة التضخم كمؤشر لاستهداف التضخم كإجراء للسياسة النقدية وتم استخدام في هذه الدراسة مدخل ( Panel Smooth Transition Regression). بينما تناولت دراسة(Aydin et al., 2016) العلاقة بين التضخم والنمو الاقتصادي في تركيا باستخدام ( A Dynamic Panel Threshold Analysis) وتبحث هذه الدراسة في تأثير التضخم على النمو الاقتصادي لخمس جمهوريات تركية وهى أذربيجان، كازاخستان، قيرغيزستان، أوزبكستان وتركمنستان، وتوصلت هذه الدراسة إلى وجود علاقة غير خطية بين التضخم ومعدل النمو وأن عتبة تأثير التضخم على النمو الاقتصادي تبلغ ٧,٩٧٪ حيث معدل التضخم فوق هذا الرقم له تأثير سلبى على الاقتصاد والأقل من هذا الرقم له تأثير إيجابي على النمو الاقتصاد وتحقيق النمو المستدام.

ثم قامت دراسة (Arawatari et al., 2018) بدراسة العلاقة غير الخطية بين التضخم والنمو من خلال منظور نظري في نموذج قائم على البحث والتطوير للنمو الداخلي حيث تكون قدرات البحث والتطوير للمعاملات غير متجانسة وتوصلت هذه الدراسة إلى وجود علاقة غير خطية بين التضخم والنمو إذا كان توزيع القدرة قوى ومستمر وأن العلاقة العكسية بين التضخم بين التضخم والنمو أضعف في الاقتصاد ذو القدرة غير المتجانسة مما هي عليه في الاقتصاد ذو القدرة المتجانسة للتضخم المنخفض، في حين أن النتيجة المعاكسة وتوصلت الدراسة أيضاً إلى أن هذه العلاقة غير الخطية تصمد في ظل قيم معلمات معقولة. في حين قامت دراسة السيد والدمرداش (٢٠١٩) بتناول العلاقة بين التضخم والنمو الاقتصادي في مصر خلال الفترة من (١٩٦١-٢٠١٧) باستخدام نماذج الانتقال السلس (STR) وذلك لتحديد عتبة التضخم أو بمعنى آخر دراسة العلاقة غير الخطية بين معدل التضخم والنمو الاقتصادي، وأظهرت نتائج الدراسة أن تلك العتبة تبلغ ١١.٣٧٪ بانحراف ١.٧٪ وهو ما يعني أن معدلات التضخم الأعلى من تلك العتبة ذات تأثير سلبي على النمو الاقتصادي. وتقترح الدراسة أن يغير البنك المركزي المصري النظر في المعدل المعلن من قبله لاستهداف التضخم وهو ١٣٪ بانحراف ٣٪ وتحقيق معدل ١١٪ لتحسين النمو الاقتصادي.

بينما تناولت دراسة (خويلد، إبراهيم وآخرون،٢٠١٩) العلاقة غير الخطية بين معدل التضخم ومعدل النمو الاقتصادي في الجزائر، خلال الفترة من الربع الأول عام ٢٠٠٠: الربع الثاني عام ٢٠١٨، وذلك باستخدام نموذج العتبة (TAR) ذات الانتقال الفوري، حيث يمثل النمو

الاقتصادي المؤخر لفترة واحدة الجزء الديناميكي، وذلك بافتراض أنه هو والحد الثابت غير متأثرين بتغير الأنظمة، بينما يتأثر معدل التضخم بمتغير العتبة المتمثل في لوغاريتم معدل التضخم. وانتهت نتائج الدراسة إلى أن معدل التضخم الذي يحفز النمو الاقتصادي في الجزائر يقع بين (٠.٤٢٢٪: ١.٠٢٪) ربع سنوياً، وبذلك يكون سنوياً بين (١.٦٨٨٪: ٤.٠٨٪ ). في حين تناولت دراسة (Karahan and colak،2020) العلاقة غير الخطية بين معدل النمو الاقتصادي ومعدل التضخم في الاقتصاد التركي، وذلك باستخدام نموذج الانحدار الذاتي الموزع غير الخطي (NARDL) بالتطبيق على بيانات ربع سنوية بين عامي (٢٠٠٣: ٢٠١٧)، وانتهت الدراسة إلى وجود علاقة سلبية غير خطية بين معدل التضخم والنمو الاقتصادي على المدى الطويل، أي أنها تدعم النهج الكلاسيكي الذي ينص على أن العلاقة بين معدل التضخم والنمو الاقتصادي علاقة عكسية.

تبع ذلك دراسة (Dinh,2020) حيث بحثت هذه الدراسة العلاقة بين معدل التضخم والنمو الاقتصادي في فيتنام، وذلك لمعرفة عتبة التضخم المثلى للنمو الاقتصادي، حيث طبقت الدراسة نموذج المربعات الصغرى العادية (OLS) ونموذج الانحدار الترتيبي، وذلك من خلال سلسله زمنية من عام ١٩٩٦ إلى ٢٠١٧ لاختبار العلاقة في الأجل القصير والأجل الطويل، وتوصلت نتائج الدراسة إلى أن الارتباط بين معدل التضخم والنمو الاقتصادي ٩٦.٦٪، وأن عتبة التضخم المثلى للنمو الاقتصادي هي ٤.٥٪. بينما قدمت دراسة (Yemba, et al.,2020) أول دراسة تطبيقية تستخدم نموذج انحدار "Kink" بعتبة غير معروفة وذلك لتقدير نقطة الانقلاب في العلاقة بين معدل التضخم والنمو الاقتصادي في الاقتصاد الكونغولي. وذلك للتعامل مع الحالة غير الطبيعة المتماثلة لمعادلة الانحدار، حيث استخدمت الدراسة طريقة "Delta bootstrap" وطريقة الاستدلال في بناء فترات الثقة لمعادلة الانحدار. وتوصلت نتائج الدراسة إلى أن معدلات التضخم الأقل من ١٧.٢٪ من شأنها أن تدفع النمو الاقتصادي، وأي معدل تضخم يتجاوز هذه العتبة سيضر بالنمو الاقتصادي.

### ١/١/٣الفجوة البحثية:

من السرد السابق يلاحظ تعدد الدراسات السابقة في الجانب التطبيقي في تحديد العلاقة بين معدل التضخم ومعدل النمو الاقتصادي، ولكن مع اختلاف الأساليب الإحصائية لم يستخدم نموذج الانحدار متعدد الحدود "Polynomial Regression Model" من قبل مثل هذا التطبيق، كما لم يتم التطرق في الدراسات السابقة للمشاكل القياسية الخاصة بنماذج الانحدار. وذلك لتحديد الشكل الأمثل للعلاقة بين معدل التضخم ومعدل النمو الاقتصادي. بالإضافة لتحديد المعدلات المثلي للتضخم التي تحفز النمو الاقتصادي.

لذلك ستحاول هذه الورقة تحديد الشكل الأمثل للعلاقة بين معدل التضخم ومعدل النمو الاقتصادي، بالإضافة إلى تحديد معدلات التضخم المحفزة للنمو الاقتصادي وذلك من خلال نموذج الانحدار متعدد الحدود، وهو ما نسرده في الجزء التالي من الدراسة.

## ١/٤ نموذج الانحدار مُتَعَدِد الحدود Polynomial Regression Model

يعتبر الانحدار متعدد الحدود نوع من الانحدار الخطي حيث يعتمد على العلاقة بين المتغير المستقل (x) والمتغير التابع (y) على nTh درجة متعدد الحدود، كما يمثل الانحدار متعدد الحدود علاقة غير خطية بين المتغير x والمتوسط للمتغير y ويرمز لها E(y/x) .

وبالرغم من أن الانحدار متعدد الحدود يمثل علاقة غير خطية للبيانات لتقدير المشكلة الاحصائية الخطية، بمعني ان دالة الانحدار الخطية للمتغيرات غير المعلومة التي تقدر وتحسب من تلك البيانات، لذلك فالانحدار متعدد الحدود يعتبر نوع خاص من الانحدار الخطى المتعدد.

### ١/١/٤ صياغة نموذج الانحدار متعدد الحدود:

يعتبر الانحدار متعدد الحدود حالة خاصة من الانحدار الخطي العام، ويتكون من متغير مستقل واحد فقط او أكثر من متغير مستقل مضاعف ومتغير تابع واحد ويعبر عنه بالعلاقة الاتية.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \cdots + \beta_m x_i^m + u_i \quad (i = 1, 2, \dots \dots . n) \qquad (1)$$

وعلي الرغم من ان الانحدار متعدد الحدود هو حالة خاصة من الانحدار الخطى العام المتعدد من الناحية الفنيه، إلا ان تفسير نموذج الانحدار متعدد الحدود يتطلب منظوراً خاصاً ومختلفاً إلى حد كبير، بالإضافة إلى أن هناك عده اشكال للانحدار متعدد الحدود منها :-

أولاً: في حالة متغير مستقل واحد ( الدرجة الثانية ):

**One Independent Variable – Second Order (Qudratic)**

$$Y_i = \beta_0 + \beta_i X_i + \beta_2 X_i^2 + u_i \qquad (2)$$

$(X_i = X_i - \overline{X})$

لاختبار صلاحية النموذج متعدد الحدود من الدرجة الثانيه يستخدم اختبار Lack of fit، هذا الاختبار يستخدم عندما يكون هناك تكرارات للاستجابة (Y) عند قيم المتغير المستقل (X) أي نفترض أن لقيم $X_i$ يوجد عده استجابات $Y_{ij}$ حيث (i=1,2,….,n , j=1,2,….,m)

لأجراء اختبار Lack of fit نتبع الخطوات التالية:

١- إيجاد مجموع مربعات انحرافات الاستجابة عن متوسطها لكل التكرارات

$$\sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \overline{Y}_j)^2 \quad (3)$$

ثُم نجمع مجاميع المربعات

$$SSE_p = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \overline{Y}_j)^2 \quad (4)$$

وحيث $SSE_p$ مجموع مربعات الخطأ النقي **Pure error** لاحظ أنه في حالة وجود استجابة واحدة ($Y_i$) عند قيم المُتغير ($x_j$) فأن $Yij = \overline{Y}_j$ وبالتالي $Y_{ij} - \overline{Y}_j = 0$ وبالتالي $X_j$ لا يُشارك في $SSE_p$ ودرجات الحُرية التابعة لـ $SSE_p$ هي (n-m) لأنهُ لا يوجد ($n_j-1$) درجات حرية لكُل $x_j$ فتكون درجات الحُرية.

$$\sum_{j=1}^{m}(n_j - 1) = \sum_{j=1}^{m} n_j - m = n - m \quad (5)$$

ويلاحظ أيضاً أن $x_j$ التي ليست لها تكرارات في الاستجابة أي $n_j = 1$ وبالتالي $n_j - 1 = 0$ لا تشارك في درجات الحرية لمتوسط مُربعات الخطأ النقي $MSE_P$

$$MSE_P = \frac{SSE_p}{n-m} \quad (6)$$

ويرجع السبب لتسمية الخطأ النقي هو أن $MSEP$ مقدر غير متحيز لتباين الخطأ $\sigma^2$ بغض النظر عن طبيعة دالة الانحدار فأن $MSEP$ يقيس التغير في Y بدون الاعتماد على أي فرضية حول طبيعة علاقة الانحدار ولهذا فأنه يسمى مقياس نقي لتباين الخطأ

٢- مجموع مربعات **Lack of Fit (SSEL)**

$$SSE_L = SSE - SSE_P \quad (7)$$

ويحسب كالتالي:

$$SSE_l = \sum_{j=1}^{m} n_j(\overline{Y}_j - \widehat{Y}_j)^2 \quad (8)$$

حيث أن $\widehat{Y}_j$ تمثل القيمة المستخدمة عندما $X = X_j$ ودرجات حرية $SSEL$ هي $(m-2)$

ولإجراء اختبار صلاحية نموذج الدرجة الثانية نكون جدول تحليل التباين $ANOVA$

جدول رقم (١) تحليل التباين ANOVA

| Source | DF | SS | MS |
|---|---|---|---|
| Regression | | | |
| X | 1 | SSR(X) | MSR(X) |
| $X^2$ / X | 1 | $SSR(X^2/X)$ | $MSR(X^2/X)$ |
| Error | | | |
| Lack of fit | m-2 | $SSE_L$ | $MSE_L$ |
| Pure error | n-m-1 | $SSE_P$ | $MSE_P$ |
| Total | n - 1 | | |

الفروض الإحصائية:

$$H_0 : E(y) = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2$$

$$H_1 : E(y) \neq \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2$$

القيمة المحسوبة:

$$F^* = \frac{MSE_l}{MSE_p} \quad (9)$$

القيمة الجدولية:

$$F\ (m-2, n-m-1, \propto)$$

فاذا كانت $F^* > F$ فالقرار رفض الفرض العدمي وبالتالي عدم ملاءمة النموذج من الدرجة الثانية والعكس صحيح.

كما يمكن إجراء الاختبار بطريقة أخرى:

الفروض الإحصائية:

$$H_0 : \beta_2 = 0$$
$$H_1 : \beta_2 \neq 0$$

القيمة المحسوبة:

$$t^* = \frac{\hat{b}_2}{s_{b_2}} \quad (10)$$

القيمة الجدولية:

$$t\left(n-3,\frac{\propto}{2}\right)$$

إذا كانت $t^* > t$ نرفض الفرض العدمي وقبول الفرض البديل بملاءمة نموذج الدرجة الثانية والعكس صحيح. كما يمكن اختبار معنويه أضافه $X^2$ الي المعادلة كالتالي:

القيمة المحسوبة:

$$F^* = \frac{MSR\ (X^2/X)}{MSE} \quad (11)$$

القيمة الجدولية:

$$F\ (1, n-m-1, \propto)$$

فاذا كانت $F^* > F$ رفض الفرض العدمي وقبول الفرض البديل بمعنوية تأثير $X^2$ على نموذج الانحدار ولتحديد نسبة مساهمة $X^2$ في التأثير على المتغير التابع Y لنسب معامل التحديد لها.

$$R^2 = \frac{SSR(X^2/X)}{SST} \quad (12)$$

كما يمكن من خلال نموذج الدرجة الثانية ومتغير مستقل واحد حساب نقطة الانقلاب كالتالي:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2 \quad (13)$$

$$\frac{d\hat{y}}{d_{xi}} = b_1 + 2b_2 x_i = 0 \quad (14)$$

$$X_m = \frac{-b_1}{2b_2} \quad (15)$$

$$\hat{Y}_m = b_0 + b_1\left(\frac{-b_1}{2b_2}\right) + b_2\left(\frac{-b_1}{2b_2}\right)^2 \quad (16)$$

وتكون نقطة الانقلاب هي $(X_m Y_m)$ وهي النقطة التي تتغير بعدها العلاقة بين (Y,X) من طردية لعكسية والعكس.

ثانيا: نموذج الانحدار متعدد الحدود من الدرجة الثالثة متغير مستقل واحد (Cubic)

يصاغ نموذج الدرجة الثالثة كالتالي: –

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \beta_3 X_i^3 + u_i \quad (17)$$

لاختبار صلاحية النموذج نكون جدول تحليل التباين التالي:

جدول (٢): تحليل التباين

| Source | DF | SS | MS |
|---|---|---|---|
| Regression | | | |
| X | 1 | SSR(X) | MSR(X) |
| $X^2$ / X | 1 | SSR($X^2$/X) | MSR($X^2$/X) |
| $X^3$ / X, $X^2$ | 1 | SSR($X^3$ / X,$X^2$) | MSR($X^3$/ X,$X^2$) |
| Error | | | |
| Lack of fit | m-3 | $SSE_L$ | $MSE_L$ |
| Pure error | n-m-1 | $SSE_P$ | $MSE_P$ |
| Total | n-1 | SST | |

لاختبار معنوية النموذج من الدرجة الثالثة: –

الفروض الإحصائية:

$$H_0 : E(y) = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \beta_3 X_i^3$$

$$H_1 : E(y) \neq \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \beta_3 X_i^3$$

القيمة المحسوبة: -

$$F^* = \frac{MSE_l}{MSE_p} \qquad (18)$$

القيمة الجدولية: -

$$F\ (m-3, n-m-1, \propto)$$

فاذا كانت $F^* > F$ نرفض الفرض العدمي وبالتالي عدم مُلاءمة النموذج من الدرجة الثالثة

تحديد مدي مساهمة $X^3$ في التأثير للمتغير التابع Y لنحسب

$$R^2 = \frac{SSR(X^3 / X, X^2)}{SST} \qquad (19)$$

ثالثًا: نموذج الانحدار متعدد الحدود في حالة وجود متغيرين مستقلين (درجة ثانية)

**Two Independent Variable (second order)**

ويأخذ النموذج الصيغة التالية:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_i^2 + \beta_{11} X_{i1}^2 + \beta_{22} X_{i2}^2 + \beta_{12} X_{i1} . X_{i2} + u_i \qquad (20)$$

$(X_{i1} = X_{i1} - \bar{X}_1 \ , \ X_{i2} = X_{i2} - \bar{X}_2)$

لاختبار صلاحية النموذج الدرجة الثانية في متغيرين نكون جدول تحليل التباين

جدول (٣): تحليل التباين

| Source | DF | SS | Ms |
|---|---|---|---|
| Regression | | | |
| $X_1$ | 1 | $SSR(X_1)$ | $MSR(X_1)$ |
| $X_2 / X_1$ | 1 | $SSR(X_2/X_1)$ | $MSR(X^2/X_1)$ |
| $X_1^2 / X_1, X_2$ | 1 | $SSR(X_1^2 / X_1,X_2)$ | $MSR(X_1^2 / X_1,X^2)$ |
| $X_2^2 / X_1, X_2,X_1^2$ | 1 | $SSR(X_2^2 / X_1, X_2,X_1^2)$ | $MSR(X_2^2 / X_1 X_2X_1^2)$ |
| $X_1.X_2/ X_1,X_2, X_1^2, X_2^2$ | 1 | $SSR(X_1.X_2/ X_1,X_2, X_1^2, X_2^2)$ | $MSR(X_1,X_2/ X_1,X_2, X_1^2, X_2^2)$ |
| Error | | | |
| Lack of fit | m-5 | $SSE_L$ | $MSE_L$ |
| Pure error | n-m-1 | $SSE_P$ | $MSE_P$ |
| Total | n-1 | SST | |

الفروض الإحصائية:

$$H_0 \ (y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} X_2^2 + \beta_{12} X_1 . X_2$$
$$H_1 \ (y) \neq \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} X_2^2 + \beta_{12} X_1 . X_2$$

القيمة المحسوبة: –

$$F^* = \frac{MSE_l}{MSE_p} \quad (21)$$

القيمة الجدولية: –

$$F \ (m-5 , n-m-1 , \propto)$$

فاذا كانت $F > F^*$ نرفض الفرض العدمي وبالتالي عدم ملاءمة وصلاحية نموذج الدرجة الثانية في حاله متغيرين والعكس صحيح كما يمكن اختبار معنوية التأثير X1 , X2 (تأثير متبادل)

الفروض الإحصائية:

$$H_0 \quad \beta_{12} = 0$$
$$H_1 \quad \beta_{12} \neq 0$$

القيمة المحسوبة: –

$$F^* = \frac{MSR(X_1.X_2/X_1,X_2,X_1^2,X_2^2)}{MSE} \quad (22)$$

القيمة الجدولية: –

$$F \ (1 , n-m , \propto)$$

فاذا كانت $F > F^*$ نقبل الفرض العدمي بعدم معنوية التأثير المتبادل بين X1 , X2 ويصحح النموذج ليصبح

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} X_2^2 + u_i \quad (23)$$

ولتحديد مدى مساهمة كل متغير في التأثير على المتغير التابع يُحسب مُعامل التحديد

مدى مساهمه $X_1$

$$R^2 = \frac{SSR(X_1)}{SST} \quad (24)$$

مدى مساهمه $X_2$

$$R^2 = \frac{SSR(X_2/X_1)}{SST} \quad (25)$$

## ٥/١ الدراسة التطبيقية:

يعرف تحليل الانحدار بانه تحليل للعلاقات بين المتغيرات، وغالبا ما تكون العلاقة بين المتغيرات خطيه وكثير من الدراسات تفترض خطية العلاقة دون التأكد من صحة هذا الافتراض. حيث أن صفة الخطية لها دور مزدوج فهي قد تعبر عن خطية العلاقة بين المتغير التابع (Y) والمتغيرات المستقلة ($X_i$) أو تشير الي خطية معالم الانحدار بغض النظر عن طبيعة العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة، التي قد تكون علاقة تربيعية أو تكعيبية ويجب قبل تقدير العلاقة بين المتغيرات البحث عن انسب صيغة رياضية تعبر عن العلاقة تعبيرا دقيقا وذلك تفاديًا للوقوع في المشاكل القياسية الناتجة عن خطا توصيف النموذج.

وقد تحدد العلاقة بين المتغيرات من خلال الدراسات السابقة ودعما لهدف البحث وهو استخدام نموذج الانحدار متعدد الحدود في تقدير العلاقة بين معدل التضخم ومعدل النمو الاقتصادي والمشاكل القياسية في نموذج الانحدار متعدد الحدود وما إذا كان استخدام نموذج الانحدار متعدد الحدود له دور في التخلص من المشاكل القياسية أم لا، وكذلك تحديد نقطة الانقلاب في العلاقة بين معدل التضخم ومعدل النمو القياسي، والتي بعدها يصبح تأثير التضخم سلبي على النمو الاقتصادي في مصر.

### ٥/١/١ نموذج الدراسة:

يستخدم نموذج الانحدار متعدد الحدود **Polynomial Regression Model** في تقدير العلاقة بين معدل النمو الاقتصادي متمثلا في معدل الناتج المحلي الإجمالي **GDP** كمتغير تابع (Y) ومعدل التضخم($X_1$) **Inflation Rate** وسعر الفائدة الحقيقي($X_2$) **Interest Rate** كمتغيرات مستقلة كالتالي:

$$GDP(Y) = f(inf(X_1), int(X_2))$$

ويتم ذلك من خلال الخطوات الأتية:

١- تأثير متغير مستقل واحد وهو معدل التضخم على معدل النمو الاقتصادي

**One Independent Variable**

٢- تأثير متغيرين مستقلين وهما معدل التضخم ومعدل الفائدة الحقيقي على معدل النمو الاقتصادي

**Two Independent Variable**

**٢/١/٥ مُتغيرات الدراسة:**

**١- معدل نمو الناتج المحلي الإجمالي Growth Rate of GDP ($Y_i$)**

هو أحد الطُرق لقياس حجم الاقتصاد، ويُحسب من خلال قيمة السلع والخدمات المنتجة من الموارد الموجودة كليًا في دولة ما خلال فترة زمنية معينة، وهو أكثر المؤشرات شمولاً للنشاط الاقتصادي الإجمالي ويمثل القيمة الإجمالية لإنتاج الدولة أثناء فترة من الوقت.

**٢- مُعدل التضخم Inflation Rate ($X_1$):**

أحد وأهم مقاييس الاستقرار الاقتصادي في المجتمع ويحسب باستخدام الرقم القياسي للأسعار ومن المتوقع أن تكون العلاقة بينهُ وبينَ مُعدل النمو الاقتصادي إيجابية حتى الوصول لنقطة معينة هي نقطة الانقلاب (عتبة التضخم) تتحول العلاقة بعدها إلى علاقة سلبية بين التضخم ومُعدل النمو الاقتصادي.

**٣- سعر الفائدة الحقيقي Interest Rate ($X_2$):**

ويُحسب عن طريق سعر الفائدة الاسمي مطروحًا منهُ مُعدل التضخم في المُجتمع وكُلما كان سعر الفائدة موجبًا كان مفيدًا للنمو الاقتصادي، ولكن إذا زاد عن حد مُعين سوف تتحول العلاقة إلى سلبية.

قبل استخدام المتغيرات في العلاقة، يجب التأكد من استقرار السلاسل الزمنية لمتغيرات النموذج المستخدم وذلك تجنبًا للوقوع في مشكلة الانحدار الزائف "**Spurious Regression**"، ومن أشهر الاختبارات المُستخدمة لاختبار استقرار السلاسل الزمنية هو اختبار ديكي فوللر الموسع "**Augment Dicky fuller**"، والذي يقوم على الفرض العدمي عدم استقرار السلاسل الزمنية والفرض البديل استقرار السلاسل الزمنية وعدم وجود جذر الوحدة وكانت النتائج كالتالي:

جدول (٤) نتائج اختبار جذر الوحدة

| المتغيرات | Level | | First Difference | |
|---|---|---|---|---|
| | ثابت فقط | ثابت واتجاه زمني | ثابت فقط | ثابت واتجاه زمني |
| مُعدل النمو الناتج المحلي الإجمالي (Y) | -2.396 | -2.3635 | -6.396 | -6.36 |
| مُعدل التضخم ($X_1$) | -2.221 | -1.93728 | -6.743 | -5.695 |
| سعر الفائدة الحقيقي ($X_2$) | -2.39 | -2.66 | -9.023 | -9.060 |

المصدر: مخرجات برنامج Minitab

| القيمة الجدولية | ثابت فقط | ثابت واتجاه زمني |
|---|---|---|
| 1% | 3.596616 | 4.363510 |
| 5% | 2.933158 | 3.520787 |
| 10% | 2.604867 | 3.19277 |

حيث أن في حالة المستوي الأصلي للمتغيرات فالقيمة المحسوبة كقيمه مطلقة اقل من القيم الجدولية عند جميع مستويات المعنوية 1% , 5% , 10% وبالتالي قبول الفرض العدمي بعدم استقرار السلاسل الزمنية في المستوى الأصلي لها وبأخذ الفرق الأول للمتغيرات أو السلاسل وجدنا أن القيمة المحسوبة كقيمة مطلقة تزيد عن القيم الجدولية عن جميع مستويات المعنوية مما يعني استقرار السلاسل الزمنية بعد الفرق الأول.

ويتم إجراء نموذج الانحدار متعدد الحدود Polynomial Regression من خلال الخطوات الأتية:

أولا: قياس أثر متغير مستقل واحد وهو معدل التضخم على معدل النمو الاقتصادي:

ويتكون نموذج الانحدار متعدد الحدود من متغير مستقل واحد وهو معدل التضخم $(X_1)$ ومتغير تابع وهو معدل نمو الناتج المحلي الإجمالي (Y) وفي البداية يجب أن نحدد الصيغة الرياضية المناسبة للعلاقة بينهم حيث افترضت كل الدراسات السابقة عدم خطية العلاقة بينهم وتُحدد العلاقة كالتالي: -

جدول (٥): نتائج اختبار الشكل الأمثل للعلاقة بين معدل النمو الاقتصادي ومعدل التضخم

| | $R^2$ | MSE | F Sig |
|---|---|---|---|
| Linear | 1% | 2.211 | 0.530 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Quadratic** | **23.9%** | **1.741** | **0.004** |
| **Cubic** | **23.7%** | **1768** | **0.011** |
| **Expential** | **.7%** | **.103** | **0.591** |
| **Logarithmic** | **.1%** | **2.231** | **0.862** |

**المصدر: مخرجات برنامج Minitab**

**ومن الملاحظ أن انسب صيغة رياضية لتقدير العلاقة بين معدل التضخم $(X_1)$ ومعدل النمو الناتج المحلي الإجمالي (Y) هو الصيغة التربيعية حيث أنها الأكبر من حيث معامل التحديد $R^2 = 23.92\%$ ومن حيث معنوية النموذج $(0.004)$ وبالتالي يتم استخدام الصيغة التربيعية "Quadratic form" ولاختبار صلاحية النموذج التربيعي نكون جدول تحليل التباين "ANOVA"**

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2 + u_i$$

**جدول(٦): تحليل التباين "ANOVA"**

| Source | DF | SS | MS | F | P-value |
|---|---|---|---|---|---|
| **Regression** | **2** | **21.9033** | **10.9516** | **6.29** | **0.004** |
| $X_1$ | **1** | **0.8873** | **0.8873** | **0.51** | **0.47** |
| $X_1^2$ /$X_1$ | **1** | **21.0159** | **21.0159** | **12.07** | **0.001** |
| **Error** | **40** | **69.6213** | **1.7405** | | |
| **Lack of fit** | **33** | **62.1432** | **1.8831** | **1.76** | **0.223** |
| **Pure error** | **7** | **7.4781** | **1.0683** | | |
| **Total** | **42** | **91.5246** | | | |

**المصدر: مخرجات برنامج Minitab**

**وتكون الفروض الإحصائية:**

$$H_0: E(y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2$$

$$H_1: E(y) \neq \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2$$

**القيمة المحسوبة:**

$$F^* = \frac{MSL_F}{MSP_E} = 1.76 \qquad (27)$$

القيمة الجدولية:

$$F\ (33, 7, .05) = 3.38$$

وحيثُ أن القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية إذن نقبل الفرض العدمي بملاءمة النموذج التربيعي لتقدير العلاقة بين مُعدل التضخُم ومُعدل النمو الاقتصادي.

وبمقارنة (.233) P-value أكبر من مستوى المعنوية (٥٪) وبالتالي قبول الفرض العدمي بملاءمة نموذج الدرجة الثانية لتقدير العلاقة بين معدل التضخم ومعدل النمو الناتج المحلي الإجمالي.

ومن مُخرجات برنامج Minitab, SPSS تظهر النتائج التالية:

جدول (٧): نتائج الانحدار

| S | R-sq | R-s (adj) | R-sq (pred) |
|---|---|---|---|
| 1.31929 | 23.93% | 20.13% | 14.26% |

**Coded Coefficients**

| Term | Coef | Se Coef | T- value | P- Value | VIF |
|---|---|---|---|---|---|
| Constant | 5.668 | 0.244 | 23.24 | 0.00 | |
| $X_1$ | 0.0528 | 0.0554 | -0.95 | 0.346 | 1.00 |
| $X_1 . X_1$ | -0.0361 | 0.0104 | -3.47 | 0.001 | 1.00 |

**Regression equation in uncoded units**

$Y = 2.58 + 0.670\ x_1 - 0.0361\ x_1 . x_1$

**Durbin Watson statistic = 2.26594**

المصدر: مخرجات برنامج Minitab

وبالتالي يمكن صياغة معادلة النموذج كما يلي:

$$\widehat{Y} = 2.58 + 0.670X_1 - 0.0361X_1^2 \quad (28)$$

$$X_i = (X_i - \overline{X})$$

كما يمكن اختبار معنوية إضافة $X_1^2$ الي النموذج:

$$H_0 : \beta_2 = 0$$

$$H_1 : \beta_2 \neq 0$$

والقيمة المحسوبة

$$F^{*}=\frac{MSR(X_1^2/X_1)}{MSE}=\frac{21.0159}{1.7405}=12.07 \quad (29)$$

والقيمة الجدولية

$F(1.40,.05) = 4.08$

حيثُ أن القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية وبالتالي نرفض الفرض العدمي وبالتالي معنوية إضافة $X_1^2$، ولتحديد نسبة مساهمة $X_1^2$ في التأثير على معدل نمو الناتج المحلي الإجمالي نحسب معامل التحديد كالتالي:

$$R^2=\frac{SSR(X_1^2/X_1)}{SST}=\frac{21.0159}{91.5246}=21.87\% \quad (30)$$

مع معنوية الإضافة (P-value .001)

وكل ما سبق يؤدي الي نفس النتيجة، وهي صلاحية النموذج التربيعي لتقدير العلاقة بين معدل التضخم ومعدل النمو الاقتصادي متمثلا في معدل نمو الناتج المحلي الإجمالي.

ولتحديد نقطة الانقلاب وهي النقطة التي تتحول عندها العلاقة من طردية بين معدل التضخم ومعدل النمو الناتج المحلي الإجمالي الي علاقة عكسية أو سلبية.

$$\hat{Y}=2.58+0.0670X_1-0.0361X_1^2 \quad (31)$$

$$b_1=0.0670 \quad , \quad b_2=-0.0361$$

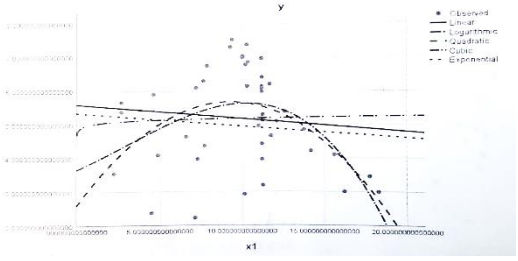
$$X_m=\frac{-b_1}{2b_2}=\frac{-.670}{2\times-.0361}=9.28\% \quad (32)$$

$$\hat{Y}_m=2.58+.670(9.28)-.0361(9.28)^2 \quad (33)$$

$$\hat{Y}_m=5.6887$$

وبالتالي نقطة الانقلاب (9.28% ، 5.68%) عند معدل تضخم 9.28% يكون معدل النمو 5.68% وبالتالي فان معدل التضخم 9.28% بعده تتحول العلاقة من إيجابية الي علاقة عكسية بين كل من معدل التضخم ومعدل نمو الناتج المحلي الإجمالي كما في شكل (١):

شكل (١) نُقطة الانقلاب



المصدر: مخرجات برنامج Minitab

وبالنسبة للمشاكل القياسية في نموذج الانحدار متعدد الحدود **Polynomial Regression** يمكن توضحها في الاتي:

١- مشكلة الازدواج الخطي:

نلاحظ عدم وجود ازدواج خطي بين $X_1$ , $X_1^2$ وذلك من خلال قيمة **Variance inflation factor (VIF)** ويساوي "1.0" أي أن قيمته اقل من (10) وبالتالي مؤشر لعدم وجود ازدواج خطي بين المتغيرات ومن المتعارف اذا كان (VIF>10) دليل علي وجود مشكلة ازدواج خطي اذا كان (VIF<10) دليل علي عدم وجود ازدواج خطي ويرجع عدم وجود ازدواج خطي لان تم التعويض عن قيم $X_i$ بالقيمة التالية: $X_i = (X_i - \overline{X})$

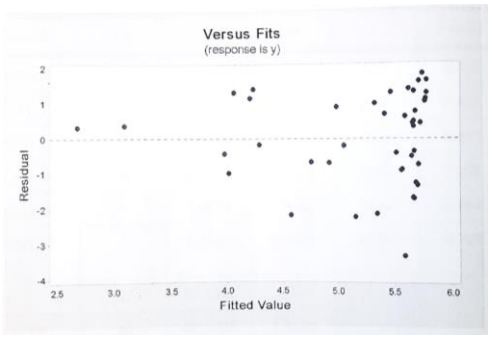
٢- مشكلة الارتباط الذاتي:

بالنسبة لمشكلة الارتباط الذاتي فان إحصائية اختبار **Durbin Watson** DW=2.265 وهي أكبر من القيمة (٢) فذلك دليل علي عدم وجود ارتباط ذاتي وبالتالي استقلال الأخطاء العشوائية وذلك نتيجة للاعتماد على الفروق الأولى للمُتغيرات.

٣- مشكلة عدم ثبات التباين:

بالنسبة لمشكلة عدم ثبات التباين فاستخدام الرسم البياني بين $\widehat{Y}$ والبواقي كما في شكل (٢)

شكل (٢) شكل الانتشار




المصدر: مخرجات برنامج **Minitab**

نلاحظ انتشار البواقي بشكل عشوائي حول الخط العام وبالتالي البواقي لا تأخذ شكل معين وبالتالي توافر ثبات التباين، وفي هذه الحالة فان نموذج الانحدار متعدد الحدود خالي من جميع المشاكل القياسية.

الخطوة الثانية: قياس تأثير متغيرين مستقلين على معدل نمو الناتج المحلي الإجمالي:

ويتم ذلك بإضافة متغير مستقل أخر وهو سعر الفائدة الحقيقي $X_2$ الي معدل التضخم $X_1$ وقياس تأثيرهم في المتغير التابع معدل نمو الناتج المحلي الإجمالي $Y$.

وبنفس الخطوات السابقة بين $Y$ , $X_2$ تبين ان انسب علاقة هي العلاقة التربيعية ويكون جدول تحليل التباين في حالة اضافة $X_2$ للعلاقة كالتالي:

جدول (٨): تحليل التباين "ANOVA"

| Source | DF | SS | MS | F | P-value |
|---|---|---|---|---|---|
| Regression | 5 | 24.2914 | 4.8583 | 2.67 | 0.037 |
| $X_1$ | 1 | 0.8873 | 0.8837 | 0.49 | 0.489 |
| $X_2$ / $X_1$ | 1 | 0.050 | 0.050 | 0.03 | 0.869 |
| $X_1^2$ / $X_1, X_2$ | 1 | 21.133 | 21.133 | 11.63 | 0.002 |
| $X_2^2$ / $X_1, X_2, X_1^2$ | 1 | 2.0625 | 2.0625 | 1.14 | 0.294 |
| $X_1. X_2$/ $X_1, X_2, X_1^2, X_2^2$ | 1 | 0.1586 | 0.1586 | 0.09 | 0.765 |
| Error | 37 | 67.2332 | 1.817 | | |
| Lack of fit | 36 | 65.1727 | 1.8104 | 0.88 | 0.707 |
| Pure error | 1 | 2.0604 | 2.0604 | | |
| Total | 42 | 91.5246 | | | |

المصدر: مخرجات برنامج Minitab

وتم صياغة النموذج من الدرجة الثانية في حالة متغيرين مستقلين كالتالي: -

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} X_2^2 + \beta_{12} X_1 . X_2 + u_i \quad (34)$$

$$\widehat{Y} = 2.28 + .731 X_i + .120 X_2 - .0384 X_1^2 - .00864 X_2^2 - .0079 X_1 . X_2 \quad (35)$$

بمعامل تحديد $R^2 = 26.54\%$ ولاختبار معنوية التأثير المتبادل بين $X_1$ , $X_2$ كالتالي:

الفروض الإحصائية:

$H_0 : \beta_{12} = 0$

$H_1 : \beta_{12} \neq 0$

القيمة المحسوبة:

$$F^* = \frac{MSR(X_1.X_2 / X_1, X_2, X_1^2, X_2^2)}{MSE} = \frac{0.1586}{1.817} = .087$$

والقيمة الجدولية:

$$F(1.37, .05) = 4.17 \quad (36)$$

حيثُ أن القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية وبالتالي قبول الفرض العدمي بأنَ ليس هُناكَ تأثير مُتبادل بين $X_1, X_2$ وبالتالي فالعلاقة تُصاغ كما يلي:

$$\widehat{Y} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} X_2^2 \quad (37)$$

أما بالنسبة للمشاكل القياسية في نموذج الانحدار متعدد الحدود:

١- مشكلة الازدواج الخطي:

من الملاحظ أن جميع قيم (VIF<10) ودليل على عدم وجود ازدواج خطي كما أن سعر الفائدة تم حسابه من خلال استبعاد معدل التضخم منهُ وبالتالي لا يوجد ازدواج خطي.

وان المُتغيرات تم حسابها كالتالي: -

$(X_{1i} = X_1 - \overline{X}\ ,\ X_2 = X_2 - \overline{X})$

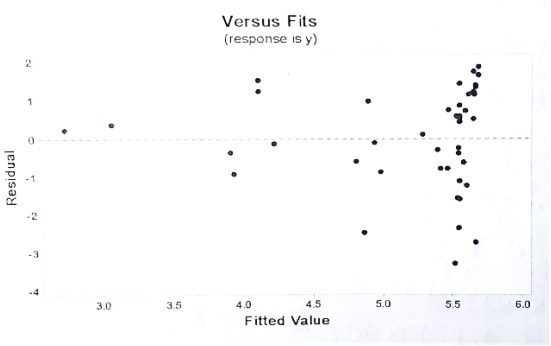
٢- مشكلة الارتباط الذاتي:

تحدد من خلال قيمة Durbin Watson DW=2.2733 وهو أكبر من 2 وبالتالي دليل على استقلال الأخطاء العشوائية وعدم وجود ارتباط ذاتي بينها.

٣- مشكلة عدم ثبات التباين:

وتحدد من خلال الرسم البياني كما في شكل (٣) التالي:

شكل (٣) شكل الانتشار




المصدر: مخرجات برنامج Minitab

من الملاحظ أن الأخطاء العشوائية تأخذ شكل عشوائي وليس شكل معين حول الخط العام وبالتالي دليل على ثبات التباين.

## ١/٦ نتائج الدراسة:

استهدفت الدراسة استخدام نموذج الانحدار متعدد الحدود Polynomial Regression Model في تقدير العلاقة بين معدل التضخم ومعدل نمو الناتج المحلي الإجمالي وتحديد نقطه الانقلاب التي تتحول العلاقة عندها من إيجابية الي سلبيه وتحديد المشاكل القياسية في نموذج الانحدار متعدد الحدود وما اذا كان له دور في التخلص من تلك المشاكل وتم ذلك باستخدام سلسلة زمنية للفترة (١٩٧٥-٢٠١٨) وذلك باستخدام معدل نمو الناتج المحلى الإجمالي كمؤشر للنمو الاقتصادي كمتغير تابع (Y) ومعدل التضخم ($X_1$) وسعر الفائدة الحقيقي ($X_2$) كمتغيرات مُستقلة وتوصلت الدراسة للنتائج التالية:

١- نظرا لأهمية الاستقرار في السلاسل الزمنية لتقدير العلاقات الاقتصادية وتجنبًا للوقوع في مشكلة الانحدار الزائف تم اختبار استقرار السلاسل الزمنية باستخدام اختبار ديكي فوللر الموسع (ADF) وقد تمَ استقرار السلاسل الزمنية بعد الفروق الأولى.

٢- باستخدام البرامج الإحصائية SPSS, Minitab لتحديد انسب صيغة رياضية بين معدل التضخم ومعدل نمو الناتج المحلي الإجمالي تبين أن الصيغة التربيعية هي الأنسب وان العلاقة بينهم علاقة غير خطية Quadratic form بمُعامل تحديد $R^2 = 23.92\%$ ومعنوية $F$للنموذج (0.004)

٣- تقدير العلاقة من الدرجة الثانية لنموذج الانحدار مُتعدد الحدود في حالة متغير مستقل $X_1$ وهو معدل التضخم كالتالي:

$$\widehat{Y} = 2.58 + .0670X_1 - .0361X_1^2$$

وتبين مدى مساهمة ومعنوية $X_1^2$ والعلاقة التربيعية في تأثيرها من المتغير التابع بمعامل تحديد $R^2 = \%21.87$

٤- كانت العلاقة في بادئ الأمر بين معدل التضخم ومعدل النمو الاقتصادي ممثلا في مُعدل الناتج المحلي الإجمالي (إيجابية) حتى نقطة معينة وهي نقطة الانقلاب وذلك عند مُعدل تضخم ٩.٢٨٪ بعدها تتغير العلاقة أو التأثير من مُعدل التضخم على مُعدل نمو الناتج المحلي الإجمالي إلى تأثير سلبي وبالتالي توصلت الدراسة إلى نقطة الانقلاب هي (٥.٦٨٪, ٩.٢٨٪) وهي تتفق معا كثير من الدراسات السابقة والتي اقترحت على السلطات النقدية في مصر استهداف مُعدل تضخم تتراوح قيمته بين ٩٪ إلى ١٢٪.

٥- وبالنسبة للمشاكل القياسية تبين خلو نموذج الانحدار مُتعدد الحدود من جميع المشاكل القياسية.

٦- عند إدخال مُتغير مُستقل أخر إلى جانب مُعدل التضخم وهو سعر الفائدة الحقيقي ($X_2$) تبين عدم وجود تأثير مُتبادل بينهم وزادَ مُعدل التحديد إلى ٢٦.٥٤٪ وذلك دليل على أن مُعدل التضخم أهم مُتغير في التأثير على النمو الاقتصادي وتم تقدير العلاقة كالتالي:

$$\widehat{Y} = 2.28 + .731X_i + .120X_2 - .0384X_1^2 - .00864X_2^2 - .0079X_1.X_2$$

وبالمثل توصلنا إلى خلو النموذج من جميع المشاكل القياسية مما يُشير إلى أهمية نموذج الانحدار مُتعدد الحدود في التخلص من المشاكل القياسية الثلاثة وهي الارتباط الذاتي والازدواج الخطي وعدم ثبات التباين.

## ١/٧ التوصيات:

١- تحديد نوع العلاقة كونها خطية أو غير خطية لهُ دور كبير في تفادي الوقوع في المشاكل القياسية حيث تفترض كثير من الدراسات خطية العلاقة دون التأكد من صحة ذلك.

٢- من الملاحظ أن نموذج الانحدار متعدد الحدود له دور هام في التخلص من المشاكل القياسية لذلك يوصي باستخدامه.

٣- توصي الدراسة بأنه يجب على البنك المركزي صياغة سياسة نقدية تساهم في استهداف معدلات تضخم تقل عن 9.27%.

٤- توصي الدراسة بإدخال متغيرات أخرى للدراسة مثل العادات والواردات والأنفاق الحكومي وغيرها كمتغيرات مؤثرة على النمو المحلي الإجمالي.

٥- توصى الدراسة بعمل المزيد من النماذج القياسية لتوضيح الآثار المترتبة على السياسات المالية والنقدية المثلى للحكومة في ظل وجود العلاقة غير الخطية بين معدل التضخم ومعدل النمو الاقتصادي.

## المراجع العربية:


١- إبراهيم خويلد، أحمد سلامي، وليد صاحب ( ٢٠١٩ )، معدلات التضخم المحفزة للنمو الاقتصادي : مقاربة نموذج العتبة من الجزائر ، المجلة الجزائرية للتنمية الاقتصادية، المجلد ٠٦ (العدد ٠٢ )، الجزائر : جامعة قاصدي مرباح ورقلة، ص.ص ١٧- ٢٨

٢- السيد، أشرف لطفي، الدمرداش، هاني محمد (٢٠١٩) "علاقة التضخم بمعدل النمو الاقتصادي في مصر باستخدام نماذج انحدار الانتقال السلس (STR) " المجلة العلمية للبحوث التجارية، كلية التجارة، جامعة المنوفية، العدد الأول.

٣- عطية، عبد القادر محمد (١٩٩٨) "الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق" الطبعة الثانية، كلية التجارة، جامعة الإسكندرية.

٤- عطية، عبد القادر محمد (٢٠٠٥) "الحديث في الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق" الدار الجامعية، جامعة الإسكندرية، كلية التجارة، الطابعة الثانية.

٥- عناني، محمد عبد السميع (١٩٩٢) "مبادئ الاقتصاد النظري والتطبيقي" الطبعة الثانية، كلية التجارة، جامعة الزقازيق.


## المراجع الأجنبية:


1- Abuo – Ali H, and H. kheir –EL-Din (2009) **"inflation and growth in Egypt: is there Threshold effect "Middle** east Development, Journal 01 (01):59-78

2- Arawatari, R. T. Hori, K. Mino, (2018), "on the nonlinear relationship between inflation and growth: A theoretical exposition", **Journal of Monetary Economics",** 94, PP. 79-93.

3- Aydin, C, O. Esen, M. Bayrak, (2016), "Inflation and Economic Growth: A Dynamic Panel Threshold Analysis for Turkish Republics In Transition Process", **Procedia–Social and Behavioral Science,** 299, P. 146-205.

4- Baglan, D. and E. yoldas (2014). **"Non – Linearity in The inflation – growth relationship in developing economies: Evidence from a semi parametric panel model"** Economics Letters 125 (1): 93 – 96.

5- Baharumshah, A.Z, V. Slesman, M.E. Wanar, (2016), "Inflation, Inflation Uncertainty, and economic growth in emerging and developing countries: Panel data evidence", **Economic Systems,** 40, PP. 638 – 657.

6- Bittencourt, M. (2012), "Inflation and economic growth in Latin America some panel time – series evidence", **Economic Modeling,** 29, PP. 333-340.

7- Dicky, D. A and W. A. Fuller (1981) **"Likelihood Ratio statistics for Autoregressive time series with Rout**" Econometric, 49 pp 1057 -1072.

8- DINH, D. V. (2020). **Optimal inflation threshold and economic growth: Ordinal regression model analysis.** The Journal of Asian Finance, Economics, and Business, 7(5), 91-102.

9- Draper, N.R. and H. Smith **"Applied Regression Analysis"** 2 ded. New York, John Wiley & sans, 1981.

10- Durbin, J. & Watson, G. S (1950) **"Testing for serial correlation in least square Regression"** vol. 37, pp: 409-428.

11- Eggoh. J.C, M. Khan (2014), "On the nonlinear relationship between Inflation and economic growth", **Research in Economics,** 68, PP.133-143.

12- Fakhri Hasanov **"Relationship between inflation and economic growth in a Azerbaijani economic：is There any Threshold effect?"** Asian journal of Business and Management Science, voL1, No 1.2010.

13- Fan, Janginy (1996) **"Local Polynomial Modelling and its Application"** Monographs on Statistics and Applied Probability.

14- Hosney, A. (2016) **"what is the control boni of Egypt's implicit in inflation Target?"** international journal of Applied Economy 13(1).43-56.

15- Karahan, Ö., & Çolak, O. (2020). **Inflation and Economic Growth in Turkey: Evidence from a Nonlinear ARDL Approach**. In Economic and Financial Challenges for Balkan and Eastern European Countries (pp. 33-45). Springer, Cham.

16- Magee, Lonnie (1998) **"Non-Local Behavior in Polynomial Regression"** The American Statistician, American Statistical Association, 52 (1): 20-22.

17- Oikawa, K. K, Ueda, (2018), "The Optimal Inflation rate unde Schumpeterian growth", **Journal of Monetary Economics,** PP.114-125.

18- Stigler, Stephen M. (November 1974) **"Georganne 1815 paper on design and analysis of polyamide Regression experiments"** Historia Mathematica. 1 (4). 431-439.

19- Thanh, S.D. (2015), "Threshold effects of Inflation on growth in the ASEAN-S Countries: A Panel Smooth transition regression approach", **Journal of Economics, Finance and Administrative Science,** 26, PP. 41-48.

20- Uung, F.S (2017), "Explaning the nonlinearity of Inflation and Economic growth: The role of Tax evasion", **International Review of Economics and Finance,** 52, PP. 436 – 445.

21- Valdovinous, G.G.F (2003), "Inflation and economic growth in the long run", **Economic Letters,** 80, PP. 167-173.

22- Vinayagathasan, T, (2013), "Inflation and economic growth: A dynamic panel threshold analysis for Asian Economics", **Journal of Asian Economics,** 26, PP. 31 – 41.

23- Williams, E, J. (1959) **"Regression Analysis"** New York John Willey& Sons,.

24- Yasir, Ali Mubarik (2005) **"Inflation and Growth An Estimate of the threshold level of inflation in Pakistan"** SBP- Reserch Bulletin, vol (1), Number (1), P35-44.

25- Yemba, B., Kitenge, E., & Woodburne, P. (2020). **Non-linear Effects of Inflation on Economic Growth in the Democratic Republic of the Congo**. South African Journal of Economics, 88(4), 536-550.