مجلة البحوث المالية والتجارية
المجلد (26) – العدد الرابع – أكتوبر 2025

استخدام التوزيعات الاحتمالية متغيرة المعلمات لتقدير توزيعات الخسائر لتأمين السيارات التكميلي بالتطبيق على السوق المصري

Using varying-parameters probability distributions to estimate loss distributions for supplementary Auto insurance, applied to the Egyptian market

د/ طارق عبد الحميد أحمد طه
أستاذ مساعد بقسم الإحصاء والرياضة والتأمين
كلية التجارة – جامعة طنطا
E-mail: tarek.taha@commerce.tanta.edu.eg

تاريخ الإرسال	13/7/2025
تاريخ القبول	17/7/2025
رابط المجلة:	https://jsst.journals.ekb.eg/

المستخلص:

هدف هذا البحث إلى تقدير حجم الخسائر في فرع تأمين السيارات التكميلي، لمحاولة الحد من خسائره الاكتتابية من خلال تقليل الانحرافات ما بين النتائج الفعلية والمتوقعة بما يساعد شركات التأمين في السوق المصري على الاستمرار في تقديم تغطياتها التأمينية بكفاءة، وتم الوصول إلى هذا الهدف من خلال ما تقدير معلمات التوزيعات الاحتمالية ذات المعالم المتغيرة المقترحة لتأمين السيارات التكميلي واختيار النموذج المناسب واستخدامه في تقدير توزيعات خسائره بالتطبيق علي بيانات السوق المصري خلال الفترة من ٢٠٠٠/٢٠٠١ إلي ٢٠٢٢/٢٠٢٣، وأظهرت نتائج الدراسة التطبيقية التفوق الواضح للنماذج ذات المعلمات المتغيرة وقدرتها على تمثيل بيانات حجم التعويضات بصورة أدق وأكثر ملاءمة، ولا سيما في تقدير حجم الخسائر بقطاع التأمينات العامة، لما توفره من دقة وموثوقية أعلى في النتائج، وأوصت هذه الدراسة بأهمية استخدام التوزيعات الاحتمالية متغيرة المعلمات باعتبارها أداة قوية لتحسين تقدير توزيعات الخسائر في التأمين التكميلي، مما يؤدي إلى قرارات أكثر استنارة وفعالية في عملية التسعير، التحوط، وإدارة المخاطر، بالإضافة إلي أن توزيعي Log–Logistic (3P)، Weibull (3P) هما الأكثر ملاءمة لتقدير خسائر تأمين السيارات التكميلي خلال الفترة المتوقعة، كما تشير القيم المتوقعة إلى استقرار نسبي مع ميل طفيف للانخفاض بداية من عام ٢٠٢٨ مع تذبذب محدود في القيم المتوقعة مما يدعم مصداقية النماذج المختارة.

الكلمات المفتاحية: تقدير حجم الخسائر، تأمين السيارات التكميلي، التوزيعات الاحتمالية متغيرة المعلمات.

Abstract:

The aim of the research was to estimate the size of losses in the supplementary car insurance branch, to limit its underwriting losses by reducing the deviations between actual and expected results, which would help insurance companies in the Egyptian market to continue providing their insurance coverage efficiently. This goal was achieved by estimating the parameters of the proposed variable-parameter probability distributions for supplementary car insurance, selecting the appropriate model, and using it to estimate the loss distributions in supplementary car insurance, applying it to the Egyptian market data during the study period from 2000/2001 to 2022/2022. The results of the study applied of this research showed the clear superiority of models with variable parameters in their ability to represent compensation volume data in a more accurate and appropriate manner. This result highlights the importance of relying on models with variable parameters in insurance studies, especially in estimating the volume of losses in the general insurance sector, due to the higher accuracy and reliability they provide in the results. It recommended the importance of using variable-parameter probability distributions as a powerful tool for improving the estimation of loss distributions in supplementary insurance, leading to more informed and effective decisions in the pricing, hedging, and risk management process. In addition, the Log-Logistic (3P) and Weibull (3P) distributions are the most suitable for estimating supplementary auto insurance losses over the forecast period. The forecast values also indicate relative stability with a slight tendency to decline starting from 2028 with limited fluctuation in the forecast values, which supports the reliability of the selected models.

Keywords: Estimating the size of losses, Supplementary Automobile Insurance, Variable Parameters Distributions.

مقدمة:

يعد تأمين السيارات التكميلي شكل من أشكال التأمينات الاختيارية لتوفير تغطية إضافية بهدف تقليل المخاطر المالية التي قد يتعرض لها مالك السيارة نتيجة تعرضها لخطر من الأخطار المغطاة كأخطار التصادم، الانقلاب، الحريق والسرقة بهدف التعويض عن الخسائر التي تلحق به نتيجة هلاكها أو تلفها نتيجة لتعرضها لأي من تلك المخاطر (علي، ٢٠١٦). فضلا عما سبق، فان فرع تأمين السيارات التكميلي يعد أحد ركائز تأمينات الممتلكات والمسؤولية في السوق المصري، لما له من أهمية نسبية في مكونات محفظة شركات تأمينات الممتلكات، وكذلك دوره في الحفاظ على الثروة القومية ودعم نظام الائتمان الذي تموله البنوك (صابر، ١٩٩٨).

ويمكن تحديد أهم خصائص التأمين التكميلي فيما يلي:

- **اختياري: يختلف التأمين التكميلي عن التأمين الإجباري، حيث يقرر مالك السيارة شراءه من عدمه بناءً على تقييمه لاحتياجاته ومستوى المخاطر التي يرغب في تغطيتها.**
- **متنوع: يتضمن أنواعاً مختلفة من التغطيات، مثل التأمين (ضد الحوادث والأضرار الناتجة عن أسباب أخرى غير التصادم)، وتغطية السرقة، وتغطية الأضرار الناتجة عن الكوارث الطبيعية، وتغطية المساعدة على الطريق، وغيرها.**
- **يستند إلى تقييم المخاطر الفردية: غالبًا ما يتم تسعير وثائق تأمين السيارات التكميلي بناءً على عدة عوامل فردية مثل نوع السيارة، وعمر السائق وخبرته، وسجل الحوادث، والموقع الجغرافي، ومستوى التغطية المطلوب.**

ومن الناحية العلمية، يمكن اعتبار التأمين التكميلي للسيارات آلية لإدارة المخاطر ونقلها، حيث يقوم مالك السيارة بدفع قسط إضافي للمؤمن مقابل تحمل الأخير لجزء أو كل الخسائر المالية المحتملة التي قد تنجم عن الأحداث المؤمن عليها بموجب هذه التغطيات التكميلية.

ولقد تعاظم دور هذا النوع من التأمين كوسيلة لمواجهة الأخطار التي قد تتعرض لها المركبات نتيجة لارتفاع قيمتها بأنواعها المختلفة، حيث توفر شركات التأمين التغطية التأمينية عليها ضد أخطار الحوادث، السرقة، الحريق، أو الكوارث الطبيعية.

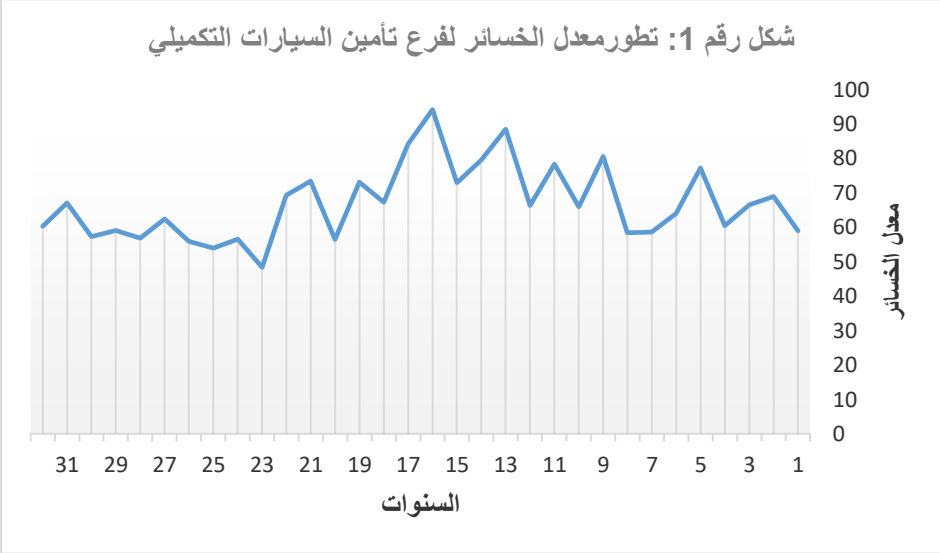
بالإضافة إلي ما سبق، تواجه شركات التأمين في السوق المصري مشكلة التنبؤ بحجم المطالبات لفرع تأمين السيارات التكميلي والذي يعد من أهم فروع تأمينات الممتلكات

والمسؤولية وأكثرها انتشاراً نظراً للتطور السريع في صناعة السيارات وارتفاع قيمتها والتزايد في أعدادها، وتمثل نسبة أقساطه حوالي 32% من اجمالي سوق تأمينات الممتلكات والمسؤولية، وكذلك تبلغ حجم تعويضاته 33.3% من إجمالي الأقساط المسددة عن العمليات المباشرة، وتبلغ متوسط حصته السوقية حوالي 20% من حصة السوق المصري الأمر الذي يتطلب مزيداً من الاهتمام بهذا الفرع (الكتاب الاحصائي السنوي عن نشاط سوق التأمين، ٢٠٢٣).

جدول رقم (١): نتائج التأمين التكميلي خلال فترة الدراسة — المبلغ بالألف جنيه

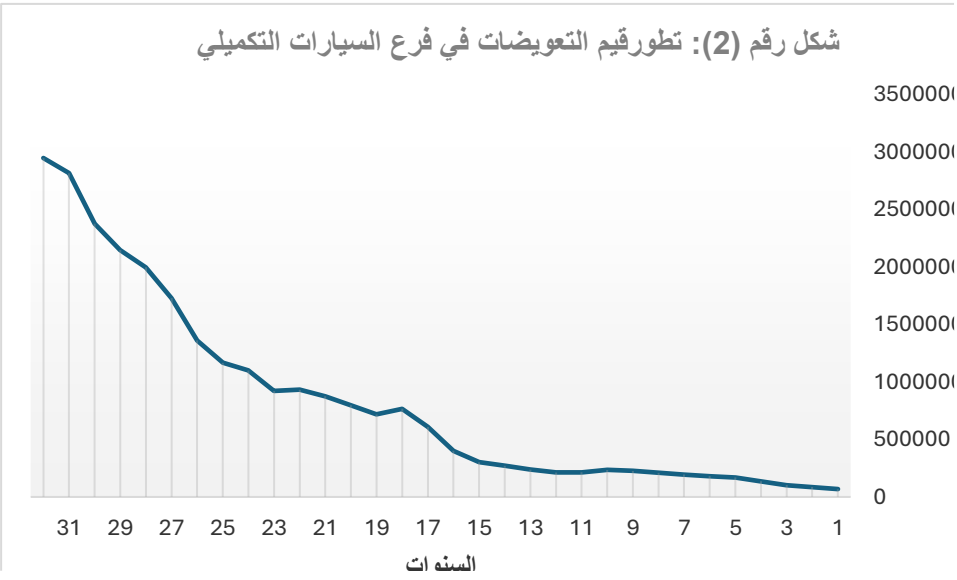
Year	فائض/عجز النشاط التأميني Y	تطور الأقساط المباشرة X_1	معدل تطور الأقساط المباشرة %	التعويضات المسددة عن العمليات المباشرة X_2	معدل تطور التعويضات المسددة عن العمليات المباشرة %	معدل الخسائر %
1991/1992	8349	119218	15.0	66670	18.2	59.0
1992/1993	11445	144369	21.0	84018	26.0	68.9
1993/1994	5013	202396	40.0	101341	20.6	66.5
1994/1995	2323	307069	51.7	134596	32.8	60.5
1995/1996	-12921	284811	-7.2	167689	24.6	77.2
1996/1997	-6999	322202	13.1	179076	6.79	64.0
1997/1998	8514	355592	10.6	193503	8.05	58.6
1998/1999	30257	391143	10.0	207980	7.5	58.4
1999/2000	13776	373612	-4.5	225024	8.2	80.6
2000/2001	18924	350632	10.4	234021	30.7	66.0
2001/2002	1186	335070	-4.4	212665	-9.1	78.3
2002/2003	8766	353873	5.6	210974	-0.8	66.3
2003/2004	-25490	381165	7.7	236215	12.0	88.5
2004/2005	2720	438228	15.0	269990	14.3	79.5
2005/2006	1267	504224	15.1	299988	11.1	72.9
2006/2007	-25791	645332	28.0	399974	33.3	94.2
2007/2008	-2001	878589	36.1	607532	51.9	84.2
2008/2009	49189	1103572	25.6	764798	25.9	67.3
2009/2010	-61359	1317118	19.4	716555	-6.3	73.1
2010/2011	27747	1442394	9.5	795977	11.1	56.5
2011/2012	-24918	1362845	-5.5	874221	9.8	73.4
2012/2013	-44722	1425157	4.6	930446	6.4	69.3
2013/2014	36729	1571976	10.3	919911	-1.1	48.4
2014/2015	20499	1796167	14.3	1097801	19.3	56.6
2015/2016	11340	2042298	13.7	1165742	6.2	54.0
2016/2017	136362	2696024	32.0	1359696	16.6	55.9
2017/2018	-24172	3225384	19.6	1727000	27.0	62.4
2018/2019	93292	3771499	16.9	1995483	15.5	56.8
2019/2020	38842	3956512	4.9	2145935	7.5	59.1
2020/2021	19289	4527753	14.4	2374138	10.6	57.3
2021/2022	3622	5431183	20.0	2813255	18.5	67.1
2022/2023	169575	6930601	27.6	2945328	4.7	60.3
المتوسط		1530875		826798.19		67.0

المصدر: الكتاب الإحصائي السنوي عن نشاط سوق التأمين، الهيئة العامة للرقابة المالية، أعداد مختلفة.



المصدر: من اعداد الباحث

بالنظر إلى جدول رقم (١) وشكل رقم (١) السابقين يتضح لنا أن نتائج تأمين السيارات التكميلي في السوق المصري خلال الفترة من ١٩٩٢/١٩٩١ وحتى ٢٠٢٣/٢٠٢٢ تتسم بتزايد معدلات خسائرها حيث تنحصر ما بين 48.4% و٩٤.٢٪ بمتوسط 67% خلال فترة الدراسة، كما يلاحظ وجود عجز تأميني في عدة سنوات خلال هذه الفترة، مما يعكس وجود فجوة بين الأقساط المحصلة والتعويضات المدفوعة، مما يستلزم تحليل أسباب هذه الظاهرة التأمينية غير المرغوبة، والشكل التالي يبين تطور قيم التعويضات خلال فترة الدراسة:



المصدر: من إعداد الباحث

ويتضح أيضاً من شكل رقم (٢) السابق أن هناك زيادة مستمرة في تعويضات التأمين التكميلي من سنة إلى أخري باستثناء السنوات ٢٠٠١/٢٠٠٢ و٢٠٠٢/ ٢٠٠٣ و٢٠٠٩/٢٠٢٠ و٢٠١٣/٢٠١٤، ويتفاوت معدل هذه الزيادة من سنة إلى أخري حيث تراوحت معدلات الزيادة خلال فترة الدراسة ما بين ٤,٧٪ إلى ٥١,٩٪.

الدراسات السابقة:

انطلاقاً من أهمية الرجوع إلى الدراسات السابقة التي تناولت المشكلات والتحديات التي تواجه تأمينات السيارات التكميلي وتقدير معدلات تكرار المطالبات وتوزيعات الخسائر في قطاع تأمين الممتلكات والمسؤولية بشكل عام والتأمين التكميلي على وجه الخصوص فسوف يستعرض الباحث بعض هذه الدراسات.

فقد هدفت دراسة (الفقي، السباعي محمد، ١٩٩١) إلى استخدام التحليل البيزي للبيانات لتحديد التوزيع الاحتمالي للتنبؤ بعدد وقيم المطالبات في التأمين، ومن ثم تحديد التوزيع الاحتمالي الملائم لقيم المطالبات، بالإضافة إلى التنبؤ بالحد الأقصى لإجمالي الخسائر السنوية المحتملة. وتوصل الباحث إلي أن عدد المطالبات خلال فترة الخبرة الأساسية يتوافق مع توزيع بواسون، وأن التوزيع الاحتمالي التنبؤي لعدد المطالبات هو توزيع ثنائي الحدين السالب بمعالم محددة. كما أن بيانات قيم المطالبات خلال فترة الخبرة الأساسية تتوافق مع توزيع جاما، وأن التوزيع الاحتمالي التنبؤي لقيم المطالبات يتوافق مع دالة بيتا بمعالم محددة. وبناءً عليه، كان التوزيع الاحتمالي التنبؤي الإجمالي لقيم المطالبات هو النوع السادس من منحنيات كارل بيرسون، وتوصلت دراسة (النحاس وسليمان، ٢٠٢١) إلى نفس النتائج بالتطبيق على تسعير وثيقة التأمين البحري أجسام سفن " اللنشات".

واهتمت بعض الدراسات السابقة علي النماذج التقليدية مثل أسلوب الجاكنيف كمقدرات لمعلمات الانحدار (علي، ٢٠٢٤)، وقليل من الدراسات اعتمد علي النماذج الإحصائية المركبة كالدمج بين أسلوب انحدار جاكنيف والانحدار اللوجستي (Obiora, H. o. and Mbegbu, J. I., 2012) ودراسة (مشعال، ٢٠١٤) والتي اعتمدت علي الدمج بين أسلوب انحدار جاكنيف مع نموذج التوزيعات الاحتمالية، واستخدمت دراسة (مشعال، ٢٠٢٢) النماذج الإحصائية الهجينة والمدمجة في قياس وتحليل أخطار الاندماج، لأنها تعطي تقديرات أفضل مقارنة

بالنماذج التقليدية، كما أوصت أيضاً باستخدام التوزيعات الاحتمالية متغيرة المعلمات لقياس مدي كفاءة تقدير قياس أخطار الاندماج.

وقدم (البلقيني، ٢٠٠١) نتائج تجارب للتنبؤ بتكاليف المطالبات لفرع تأمين السيارات التكميلي لإحدى الشركات في السوق المصري في محاولة التنبؤ الجيد بالأقساط الصافية، ثم بعد ذلك يعدل السعر باستخدام نظرية الفئات الفازية.

كما هدفت دراسة (عطا وآخرون، ٢٠٠٦) إلى استخدام التوزيعات الاحتمالية ونظرية المصداقية للتوصل إلى السعر العادل لأخطار المسؤولية المدنية بالتطبيق على قطاع الصناعات المعدنية، وتوصل الباحثون إلى أنسب التوزيعات الاحتمالية لحل مشكلة عدم تناسب الأقساط المحصلة مع قيم التعويضات المدفوعة لهذا النوع من التأمين.

وركزت دراسة (Mazviona, 2013) على فحص مدي ملائمة بعض التوزيعات الاحتمالية لبيانات مطالبات تأمين السيارات، مثل توزيعات (باريتو، جاما، التوزيع الأسي، والتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي)، وتوصلت إلى مناسبة تلك التوزيعات لطبيعة بيانات مطالبات تأمين السيارات التكميلي أو توزيع مركب من أكثر من توزيع من هذه التوزيعات.

كما هدفت دراسة (علي، ٢٠١٦) إلى التعرف على التحديات والمشكلات التي تواجه فرع تأمين السيارات التكميلي في السوق المصري بهدف الارتقاء بأدائه، وذلك من خلال تحليل نتائجه، وتوصلت الدراسة إلي وجود قصور في عملية الاكتتاب لهذا الفرع مما يجعل عملية التسعير غير دقيقة، وبالتالي ارتفاع معدلات خسائره، وكذلك عدم الدقة في تقدير مخصصاته الفنية، كما أوصت الدراسة بضرورة اتباع الأساليب العلمية والطرق الاكتوارية في تسعير هذا الفرع.

وهدفت دراسة (الخواجة، ٢٠١٩) إلى تقدير التعويضات لتأمين السيارات التكميلي باستخدام المقارنة بين تقديرات التوزيعات الاحتمالية وطريقة البوتستراب، وأوصت هذه الدراسة باستخدام طريقة البوتستراب في تقدير التعويضات لفرع التأمين التكميلي لأنه أظهر كفاءة أكبر من الأساليب التقليدية بالاعتماد على أقل قيمة لمربع الخطأ النسبي (RSE) في عملية المقارنة.

كما هدفت دراسة (هاشم، ٢٠١٩) إلى التوصل إلي شكل التوزيع الاحتمالي للتنبؤ بمطالبات تأمين السيارات التكميلي، ولتحقيق هذا الهدف قام الباحث بتوفيق توزيع

احتمالي لعدد المطالبات الفعلية لتوزيع بواسون وتوزيع بيرسون، وتم توفيق توزيع احتمالي لقيم المطالبات من خلال الحصول على العزوم الخاصة لتوزيع كل منهما، ثم قام الباحث بتوفيق توزيع احتمالي من التوزيعين السابقين وتوصل إلى أن توفيق المنحني يتبع عائلة منحنيات بيرسون لملائمته لبيانات مطالبات تأمين السيارات التكميلي.

ثانيا: مشكله البحث:

مما تقدم يتضح ارتفاع وتقلب معدلات الخسارة في فرع تأمين السيارات التكميلي، مع وجود عجز تأميني في بعض السنوات مما يدل على عدم الدقة الكافية في تقدير أسعاره، وأن أسعاره لا تحقق مبدأ الكفاية ونتائج الخبرة الماضية خلال فترة الدراسة خير دليل علي ذلك.

كما أن الدقة في التنبؤ بتكلفة الخسائر المتوقعة عن فترة مستقبلية لتأمين السيارات التكميلي تعد من أهم محددات الربحية النهائية لوثائقه، مما يستلزم ذلك الأمر بناء النماذج الرياضية التي يمكن استخدامها في التنبؤ أو تقدير تكلفته المستقبلية، وتعتمد شركات التأمين في التنبؤ بحجم الخسارة على الطرق التقديرية، لذا يجب التركيز على دراسة تقدير توزيعات الخسارة بأسلوب علمي ودقيق حتى تستطيع شركات التأمين أن تقوم بتقدير الاحتياطيات المناسبة للتعويضات المتوقعة، ومن هنا ركز الباحث على تقدير التوزيع الاحتمالي المناسب الذى يحكم عملية التعويضات للتأمين التكميلي في السوق المصري، وتعد التوزيعات الاحتمالية ذات المعالم المتغيرة من التوزيعات التي تراعى التغير في قيم متوسطات الخسارة والذى يناسب بيانات حجم خسائر تأمين السيارات التكميلي.

ويمكن تلخيص مشكلة البحث فيما يلي:

١- أخطار تأمين السيارات التكميلي تتسم بأنها بها خاصية الالتواء، مما يستلزم البحث عن توزيعات تناسب بيانات مطالباتها.

٢- ارتفاع معدل نمو التعويضات عن معدل نمو الأقساط مما ترتب على ذلك تحقق مطالبات غير متوقعة، وبالتالي التأثير سلباً على قدرة شركات التأمين على تغطية المطالبات المتوقعة.

٣- عدم دقة أسعار تأمين السيارات التكميلي في مصر بسبب ارتفاع حجم الخسائر بهذا الفرع والمنافسة السعرية الضارة بين شركات التامين المحلية والدولية.

٤- ارتفاع معدل الخسارة في تأمين السيارات التكميلي بصورة كبيرة حيث وصل إلى 94.2 % مما أدى إلى تكبد شركات التأمين لخسائر ناتجة عن صرف التعويضات.

٥- لجوء شركات إعادة التأمين في الخارج إلى تخفيض عمولات شركات التأمين في هذا الفرع التأميني بسبب تزايد خسائره.

ثالثا: هدف البحث:

يهدف البحث إلى تقدير حجم الخسائر في فرع تأمين السيارات التكميلي، لمحاولة الحد من خسائره الاكتتابية من خلال تقليل الانحرافات ما بين النتائج الفعلية والمتوقعة بما يساعد شركات التأمين في السوق المصري على الاستمرار في تقديم تغطياتها التأمينية بكفاءة.

وسوف يتم الوصول إلى هذا الهدف من خلال ما يلي:

١- تقدير معلمات التوزيعات الاحتمالية ذات المعالم المتغيرة المقترحة لتأمين السيارات التكميلي.

٢- اختيار النموذج المناسب واستخدامه في تقدير توزيعات الخسائر في تأمين السيارات التكميلي بالتطبيق على بيانات السوق المصري خلال فترة الدراسة.

رابعا: أهمية البحث:

تتلخص أهمية هذا البحث في أن نجاح شركات التأمين في التنبؤ بحجم الخسائر المستقبلية المتوقعة يساعد متخذ القرار في الشركة على ما يلي:

١. نمذجة أكثر واقعية لبيانات الخسائر غير المستقرة، مما يؤدي إلى تقديرات أفضل للاحتياطيات والتسعير مع توفير التغطية التأمينية لفرع السيارات التكميلي بالسعر العادل والكافي.

٢. عملية تسعير ديناميكي تدعم استراتيجيات التسعير التي تتكيف مع الظروف المتغيرة للسوق والمخاطر.

٣. التقدير الواقعي للعمليات الفنية الخاصة بشركات التأمين والتي تعتمد على تقديرات الخسائر.

٤. حدوث توازن في المحفظة التأمينية لفرع تأمين السيارات التكميلي.
٥. إعطاء السوق المصري لتأمين السيارات التكميلي فرصة لخلق قدرات تنافسية جديدة.
٦. تحسين وتطوير جودة منتجات شركات التأمين العاملة في فرع تأمين السيارات التكميلي.
٧. القيام بعمليات إعادة التأمين لهذا الفرع من التأمين على أسس فنية سليمة.

خامسا: مجتمع وحدود البحث:

تتمثل حدود هذا البحث فيما يلي:

١- فرع التأمين: يتم التطبيق على فرع تأمين السيارات التكميلي في السوق المصري.
٢- شركات التأمين: يتم التطبيق على كافة شركات تأمين القطاع العام خلال فترة الدراسة.
٣- الفترة الزمنية: سيتم استخدام بيانات الخسارة عن الظاهرة خلال الفترة 2001/2000- 2023/2022.
٤- متغيرات الدراسة: حجم الخسائر لتأمين السيارات التكميلي.

سادسا: أسلوب البحث:

تهتم هذه الدراسة بالجوانب التطبيقية لتقدير توزيعات الخسائر في فرع تأمين السيارات التكميلي، باستخدام التوزيعات الاحتمالية ذات المعالم المتغيرة.

الأسلوب الإحصائي المستخدم:

مفهوم التوزيعات الاحتمالية متغيرة المعلمات:

معلمات التوزيعات الاحتمالية التقليدية (مثل المتوسط، التباين، معاملات الشكل) تكون ثابتة، أما بالنسبة للتوزيعات متغيرة المعلمات، فتتسم هذه المعلمات بالتغير بناءً على متغيرات أخرى أو بمرور الزمن، وهذا يسمح للنموذج بالتكيف مع التغيرات في بيانات الخسائر التي قد تكون ناجمة عن عوامل اقتصادية، تنظيمية، أو تغييرات في سلوك المؤمن عليهم.

تتسم التوزيعات الاحتمالية متغيرة المعلمات Variation Parameters Distributions بأنها توزيعات ثنائية وثلاثية المعالم، أو أكثر ويتم تقدير المعالم من البيانات الاصلية والحصول على توقع التوزيع المناسب، وفى كل مرة من مرات

حذف المشاهدات (طريقة البوتستراب وجاكنيف) يتم تقدير معالم النموذج وقيمه المتوقعة، وفى النهاية يتم تجميع توقعات كل التوزيعات ثم يتم إيجاد جودة التوفيق للبيانات الجديدة(المتوسطات) واختيار التوزيع ذات المعالم المتغيرة المناسب لتأمين السيارات التكميلي، وتتم المقارنة بين النموذج ذي المعالم المتغيرة المقترح والتوزيعات ذات المعلمات الثابتة من خلال دقة التنبؤ لمقياس مربع الخطأ النسبي Relative squared error (RSE).

باختصار، استخدام التوزيعات الاحتمالية متغيرة المعلمات يعد أداة قوية لتحسين تقدير توزيعات الخسائر في التأمين التكميلي، مما يؤدي إلى قرارات أكثر استنارة وفعالية في عملية التسعير، التحوط، وإدارة المخاطر.

تعتمد هذه الطريقة على القيام بعملية تقدير متوسطات التوزيعات الاحتمالية السابقة والناتجة من حذف المشاهدات delete-one وبشكل متكرر مثل أسلوب جاكنيف وإعادة المعاينة، حيث تم اختيار أفضل توزيع بناء على مؤشر الاحتمال المشاهد فى كل مرة حذف وفى كل مرة توضع القيمة المتوقعة مع المشاهدات الأصلية ونعيد التقدير بإيجاد قيمة متوقعة أخرى وهكذا، حتى تم تكوين التوزيع الاحتمالي وباستعمال قيم المتوسطات المقدرة الجديدة يمكن الحصول على (m) من التوزيعات الاحتمالية الجديدة ذات المعالم المتغيرة (Friedl, H., Stampfer, 2002 ; Shao and Tu, 2005).

خصائص التوزيعات الاحتمالية ذات المعلمات المتغيرة

تستخدم بعض النماذج الاحتمالية متغيرة المعلمات في عملية التنبؤ بحجم المطالبات التي تتميز بتغير قيم متوسطات الخسارة والتي تلائم بيانات تأمين السيارات التكميلي، وهذه التوزيعات تتشابه في الكثير من الخواص العامة ومنها:

- تتعامل هذه التوزيعات مع المتغيرات الموجبة فقط.
- معلمات النماذج التي تخضع لها البيانات موجبة أيضاً.
- هذه النماذج لها التواء موجب.

استنتاج التوزيعات الاحتمالية ذات المعالم المتغيرة

يتم تحديد التوزيع الاحتمالي الأنسب لقيم التعويضات من خلال محاولة ملائمة بيانات تعويضات تأمين السيارات التكميلي مع عدد من التوزيعات الاحتمالية

المختلفة، ولتحقيق هذا الهدف تم استخدام اختبارات جودة التوفيق، حيث أجري اختبار Kolmogorov–Smirnov لقياس مدى ملاءمة كل توزيع للبيانات. واعتمد معيار الاحتمال المشاهد (P–Value) كأداة رئيسية للمفاضلة بين جودة التوفيق للنماذج المختلفة، تمهيدًا لاختيار النموذج الأفضل الذي يمثل البيانات بدقة وموضوعية.

فضلاً عما سبق فان التوزيعات الاحتمالية من الأدوات الأساسية في علم الإحصاء التطبيقي، حيث تُستخدم لوصف سلوك المتغيرات العشوائية وتقدير احتمالات وقوع الأحداث المختلفة، وفي المجالات المالية والتأمينية على وجه الخصوص، تمثل هذه التوزيعات وسيلة فعّالة لتحليل وفهم الخسائر المستقبلية والتنبؤ بها، مما يُسهم في تحسين استراتيجيات التسعير وإدارة المخاطر.

ومع تطور البيئة الاقتصادية وتغير طبيعة المخاطر، ظهرت الحاجة إلى الاعتماد على نماذج أكثر مرونة وقادرة على التعامل مع البيانات غير المستقرة أو المتغيرة بمرور الزمن، ومن هنا جاء الاهتمام باستخدام التوزيعات الاحتمالية متغيرة المعلمات (Distributions with Variable Parameters)، وهي توزيعات تسمح بتغيير قيم معلماتها وفقًا لعوامل محددة أو ظروف متغيرة، مثل الزمن أو الموقع الجغرافي أو خصائص المؤمن عليهم. وتتميز هذه التوزيعات بقدرتها على تمثيل البيانات الواقعية بشكل أدق مقارنة بالتوزيعات ذات المعلمات الثابتة، خاصةً في حالة وجود تقلبات كبيرة أو بيانات متطرفة.

كما يلعب هذا النوع من التوزيعات دورًا محوريًا في تقدير الخسائر، حيث يمكن من خلالها توصيف الشكل الإحصائي لتوزيع الخسائر بشكل أكثر مرونة، مما يساعد في تحديد احتمالات الخسائر الكبيرة، واحتساب الحدود القصوى الممكنة للخسائر، وتقدير قيم المؤشرات الإحصائية مثل القيمة المتوقعة والمعيارية. وتُسهم هذه القدرة في تحسين جودة القرارات التأمينية، سواء فيما يتعلق بتسعير الوثائق، أو احتساب المخصصات الفنية، أو إدارة المخاطر الكارثية. وعليه، فإن استخدام التوزيعات الاحتمالية متغيرة المعلمات يمثل إضافة نوعية لأساليب التحليل الإحصائي التقليدية

في القطاع التأميني، ويوفّر أدوات تحليل متقدمة قادرة على التكيف مع ديناميكية الأسواق وتغير المخاطر، بما يعزز من كفاءة وفاعلية السياسات التأمينية.

أهمية استخدام التوزيعات الاحتمالية متغيرة المعلمات في سوق التأمين

يمثل قطاع التأمين أحد أكثر القطاعات تأثرًا بتقلبات المخاطر وتغير طبيعة الحوادث والخسائر بمرور الوقت. وبما أن دقة تقدير الخسائر المستقبلية تشكل حجر الأساس في تسعير الوثائق وتحديد المخصصات الفنية وإدارة رأس المال، فقد أصبح من الضروري الاعتماد على نماذج إحصائية مرنة تعكس سلوك البيانات الواقعية المتغيرة. ومن هنا، تبرز أهمية التوزيعات الاحتمالية متغيرة المعلمات، التي تسمح بتغيير معلماتها وفقًا لمتغيرات أو ظروف معينة، مما يوفر تمثيلاً أدق لتوزيع الخسائر في ظل تقلبات السوق.

تتمثل أبرز أهمية هذه التوزيعات في قدرتها على التعامل مع البيانات ذات الطبيعة المتغيرة، سواءً من حيث التباين في قيمة الخسائر، أو تكرارها، أو حدوثها في فترات زمنية متقاربة أو متباعدة. كما تتيح مرونة في تمثيل الأطراف الثقيلة للتوزيع (Heavy Tails)، والتي غالبًا ما تظهر في بيانات التأمين نتيجة احتمالية وقوع خسائر كبيرة غير متوقعة.

ويسهم هذا الأسلوب في تحسين عملية إدارة المخاطر داخل شركات التأمين من خلال توفير تقديرات دقيقة لاحتمالات الخسائر القصوى، ومؤشرات القيمة المعرضة للخطر(Value at Risk – VAR) ، والتوقعات الشرطية للخسائر (Conditional Tail Expectation – CTE)، ما يساعد في اتخاذ قرارات مبنية على بيانات واقعية أكثر توافقًا مع ديناميكية السوق.

إضافة إلى ذلك، تساهم هذه التوزيعات في تحقيق التوازن بين تسعير الوثائق والقدرة التنافسية لشركات التأمين؛ إذ تتيح للشركات تحديد أسعار عادلة تعكس طبيعة المخاطر الفعلية، دون المغالاة أو التقليل من المخاطر المحتملة. ويكتسب هذا الدور أهمية خاصة في الأسواق الناشئة، مثل السوق المصري، حيث تتسم معدلات الحوادث والخسائر بالتغير المستمر، وتتأثر بعدة عوامل اقتصادية واجتماعية

وتشغيلية. وفيما يلي جدول يوضح الإحصاءات الوصفية لتعويضات تأمين السيارات التكميلي خلال الفترة (٢٠٠٠/٢٠٠١-٢٠٢٢/٢٠٢٣).

جدول رقم (٢): الإحصاءات الوصفية لتعويضات لفرع تأمين السيارات التكميلي

Statistic	Value	Percentile	Value
Sample Size	23	Min	2.1097E+5
Range	2.7344E+6	5%	2.1131E+5
Mean	1.0912E+6	10%	2.2121E+5
Variance	$7.2373E+^{11}$	25% (Q1)	2.9999E+5
Std. Deviation	8.5073E+5	50% (Median)	8.7422E+5
Coef. of Variation	0.77962	75% (Q3)	1.7270E+6
Std. Error	1.7739E+5	90%	2.6376E+6
Skewness	0.93326	95%	2.9189E+6
Excess Kurtosis	-0.16798	Max	2.9453E+6

المصدر: نتائج برنامج EasyFit

بالنظر الي الجدول السابق يتضح أن المتوسط البالغ حوالي 1.09 مليار جنية يشير أن متوسط قيمة التعويضات مرتفع، مع وجود تباين كبير (7.23×10^{11}) وانحراف معياري مرتفع (850.7 ألف)، مما يشير إلى تشتت البيانات. كما أن معامل الاختلاف (0.78) يعكس تبايناً واضحاً حول المتوسط، بينما يشير معامل الالتواء (0.93) إلى وجود ميل للبيانات نحو القيم الأعلى، أما القيمة الوسيطة (8.74×10^{5}) فتؤكد أن نصف البيانات أقل من المتوسط، مما يشير إلى عدم تجانس البيانات ووجود قيم متطرفة مؤثرة (outliers)، وبالتالي نتوقع أن تكون التوزيعات الاحتمالية المتصلة ملتوية جهة اليمين.

اختبار جودة التوفيق لقيم المطالبات لتأمين السيارات التكميلي بسوق التأمين المصري:

يعد اختبار جودة التوفيق من الأدوات الإحصائية المهمة لقياس مدى ملاءمة توزيع احتمالي معين لتمثيل بيانات المطالبات وفي هذا الإطار، تم إجراء اختبار جودة التوفيق لقيم مطالبات تأمين السيارات التكميلي في سوق التأمين المصري، ويهدف هذا التحليل إلى تحديد التوزيع الأمثل الذي يعكس خصائص البيانات بدقة.

١. اختبار جودة المطابقة لقيم المطالبات للبيانات الأصلية

تم الاستعانة ببرنامج EasyFit لإجراء اختبار Kolmogorov–Smirnov بهدف تحديد شكل التوزيع الأنسب لبيانات حجم التعويضات الأصلية، حيث تم اختبار الفرضيات الإحصائية المتعلقة بمدى انتماء هذه البيانات إلى توزيع نظري محدد من عدمه، وذلك وفقاً للفرض التالي:

الفرض العدمي (الفرض الصفري) H0: البيانات تتبع التوزيع النظري المختار (توزيع جاما).

الفرض البديل H1: البيانات لا تتبع التوزيع النظري المختار (توزيع جاما).

وبإدخال البيانات الأصلية الي برنامج (EasyFit) وجد أن البيانات تتبع توزيع جاما من خلال نتائج الجدول رقم (٣)، حيث بلغت قيمة P. Value أكبر من ٠,٠٥ لجميع مستوي المعنوية، وبالتالي نقبل الفرض العدمي القائل بأن البيانات تتبع توزيع جاما.

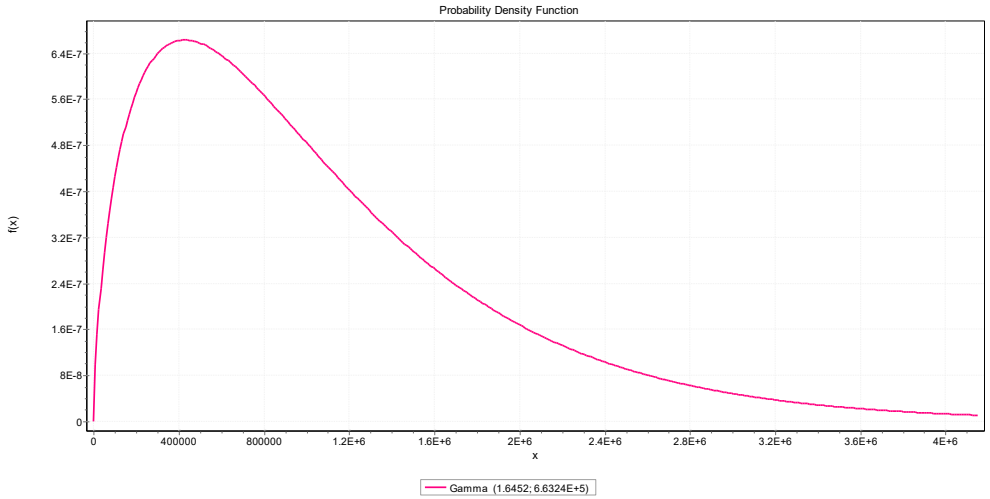
جدول رقم (٣): اختبار جودة التوفيق لتوزيع جاما باستخدام اختبار Kolmogorov–Smirnov

Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size Statistic P-Value	23 0.12167 0.84519				
مستوي المعنوية α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.21645	0.24746	0.2749	0.30728	0.32954
Reject?	No	No	No	No	No

المصدر: نتائج برنامج EasyFit

والشكل الاتي يوضح دالة كثافة الاحتمال لتوزيع جاما :

شكل رقم (٣): يبين دالة كثافة الاحتمال لتوزيع جاما



المصدر: نتائج برنامج EasyFit

ومن خلال نتائج برنامج EasyFit اتضح أن معلمتي توزيع جاما هما a=1.6452= & Shape b=6.6324E+5= Scale، وبالتالي فان القيمة المتوقعة Mean=1.0912E+6 لتوزيع جاما، وخصائص توزيع جاما كالتالي:

القيمة المتوقعة	Mean =1.0912E+6
التباين	Variance =7.2373E+11
الانحراف المعياري	St.Dev.= 8.5073E+5
معامل الاختلاف	Coef. Of Var. =0.77962
معامل الالتواء	Skewness =1.5592
معامل التفرطح	Kurtosis =3.6469

المصدر: نتائج برنامج EasyFit

توزيع جاما Gamma Distribution

توزيع جاما يمثل توزيع احتمالي مستمر للمتغيرات العشوائية التي تأخذ قيماً موجبة فقط، يتميز بالخصائص التالية الهامة في سياق مطالبات التأمين: المرونة حيث يمكنه اتخاذ أشكال متنوعة (مختلفة الالتواء) بناءً على معلمتيه الشكل α والقياس β ، والقيم

الموجبة حيث يتناسب مع طبيعة قيم المطالبات التي لا يمكن أن تكون سالبة. فضلا عن أنه دائما يكون ملتو جهة اليمين (التواء موجب) وقادر على نمذجة التوزيعات الملتوية إلى اليمين، وهو أمر شائع في بيانات مطالبات التأمين، حيث تكون معظم المطالبات صغيرة نسبياً مع وجود عدد قليل من المطالبات الكبيرة جداً.

كما يعد توزيع جاما من التوزيعات الاحتمالية المستمرة واسعة الاستخدام في العديد من التطبيقات العملية، لاسيما في مجال التأمينات العامة، كما يعد هذا التوزيع مناسبا لتحليل توزيع حجم المطالبات والتعامل مع الأخطار غير المتجانسة(Hossack, 1999) ، مما منحه مكانة مهمة في الإحصاء الاكتواري، ويمكن التعبير عن هذا التوزيع من خلال دالة كثافة الاحتمال التالية:

$$f(x) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} (\beta x)^{\alpha-1}$$

ومعلمتا هذا التوزيع α, β

وأهم خصائصه:

$$Mean = \alpha / \beta$$

$$\text{var} = \alpha / \beta^2$$

فضلاً عما سبق يعد هذا التوزيع أحد التوزيعات المهمة في دراسة المشكلات التي يكون الزمن أحد عواملها، كتلك الخاصة بطول مدة اشتغال معدات مصنع معين (Michael ,2001).

علاوة على ما سبق فإن توزيع جاما في غاية الأهمية في التطبيقات التأمينية، لأنه يتعامل مع قيم المتغيرات المتصلة، وله علاقة بالعديد من التوزيعات الأخرى، وخاصة تلك التي تتعامل مع المتغيرات المتقطعة، حيث إن هذا التوزيع يناظر أو يشابه توزيع ذي الحدين السالب، علما بأن توزيع ذي الحدين السالب ناتج من دمج توزيعي جاما مع بواسون (هرمز، امير حنا، ١٩٩٠).

بالإضافة الي ما سبق فان توزيع جاما يستخدم في الحسابات الإكتوارية: كتسعير وثائق التأمين: بمجرد ملاءمة توزيع جاما لبيانات المطالبات التاريخية، يمكن لشركة التأمين استخدامه لتقدير متوسط المطالبة المتوقعة للفرد أو لمجموعة من المؤمن لهم، وهو عنصر أساسي في حساب قسط التأمين الكافي والعادل، كما يستخدم في تقدير الاحتياطيات حيث يساعد فهم توزيع شدة المطالبات في تقدير المبالغ التي يجب على الشركة تخصيصها كاحتياطيات لمواجهة المطالبات المستقبلية، بما في ذلك احتمال حدوث مطالبات كبيرة (مطالبات الذيل). فضلا عن إدارة المخاطر حيث يمكن استخدام توزيع جاما في نماذج إدارة رأس المال لتقييم احتمالية الخسائر الكبيرة وتأثيرها على ملاءة الشركة المالية. وأخيراً حساب القيمة المعرضة للخطر (VAR) ومقاييس أخرى حيث يمكن اشتقاق مقاييس المخاطر من التوزيع الملائم لتقدير أسوأ الخسائر المحتملة عند مستوى ثقة معين.

٢. اختبار جودة المطابقة لقيم المطالبات بعد حذف المشاهدة الأولي

من خلال الاستعانة ببرنامج EasyFit لإجراء اختبار Kolmogorov-Smirnov بهدف تحديد شكل التوزيع الأنسب لبيانات حجم التعويضات بعد حذف المشاهدة الأولي، حيث تم اختبار الفرضيات الإحصائية المتعلقة بمدى انتماء هذه البيانات إلى توزيع نظري محدد من عدمه، وذلك وفقاً للفرض التالي:

الفرض العدمي (الفرض الصفري) H0: البيانات تتبع التوزيع النظري المختار (القيمة المتطرفة المعمم).

الفرض البديل H1: البيانات لا تتبع التوزيع النظري المختار (القيمة المتطرفة المعمم).

وبإدخال البيانات الأصلية الي برنامج (EasyFit) وجد أن البيانات تتبع توزيع (القيمة المتطرفة المعمم) من خلال نتائج الجدول رقم (٤)، حيث بلغت قيمة P. Value أكبر من ٠.٠٥ لجميع مستوي المعنوية، وبالتالي نقبل الفرض العدمي القائل بأن البيانات تتبع توزيع (القيمة المتطرفة المعمم).

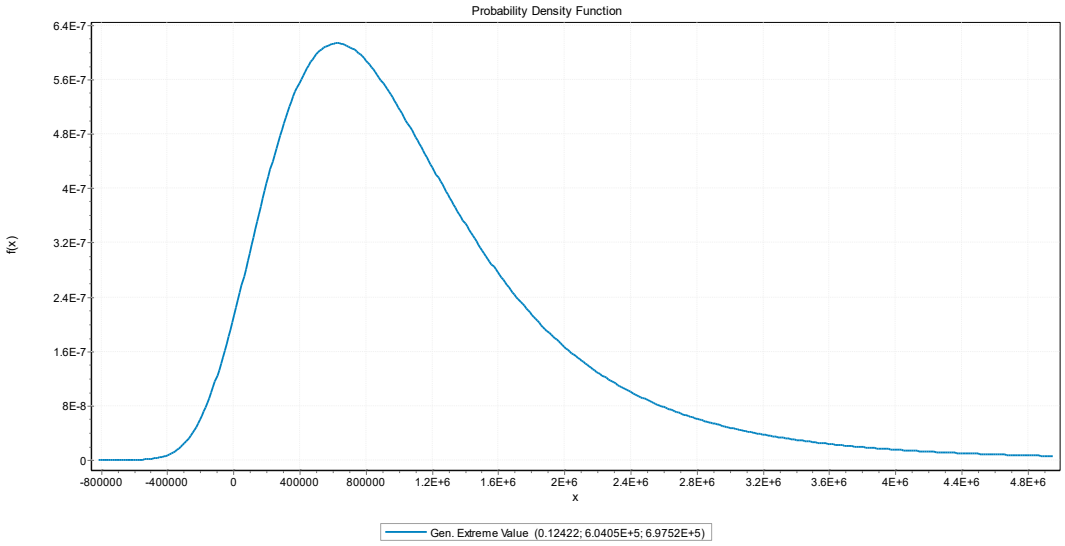
جدول رقم (٤): اختبار جودة التوفيق لتوزيع القيمة المتطرفة المعمم باستخدام اختبار

Kolmogorov–Smirnov

Gen. Extreme Value					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size Statistic P-Value	22 0.09666 0.97381				
مستوي المعنوية α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.22115	0.25283	0.28087	0.31394	0.33666
Reject?	No	No	No	No	No

المصدر: نتائج برنامج EasyFit

شكل رقم (٤): يبين دالة كثافة الاحتمال لتوزيع (القيمة المتطرفة المعمم)



المصدر: نتائج برنامج EasyFit

ومن خلال نتائج برنامج EasyFit اتضح أن معالم توزيع القيمة المتطرفة المعمم هي m=6.9752E+5 & s=6.0405E+5 & k=0.12422، وعليه فان القيمة المتوقعة Mean=1.1302E+6 لتوزيع القيمة المتطرفة المعمم، وبالتالي خصائص التوزيع هي:

القيمة المتوقعة	Mean =1.1302E+6
التباين	Variance =8.8654E+11
الانحراف المعياري	St.Dev.= 9.4156E+5
معامل الاختلاف	Coef. Of Var. =0.83312
معامل الالتواء	Skewness =-2.1798
معامل التفرطح	Kurtosis =11.044

توزيع القيمة المتطرفة المعمم Gen. Extreme Value (GEV)

يعد توزيع القيمة المتطرفة المعمم (GEV) عائلة من التوزيعات الاحتمالية المستمرة التي تم تطويرها ضمن نظرية القيمة المتطرفة لوصف القيم القصوى (الدنيا أو العليا) لعينات كبيرة من المتغيرات العشوائية المستقلة ذات التوزيع المتماثل. يتميز هذا التوزيع بمرونته العالية، حيث أنه يجمع ثلاثة أنواع من توزيعات القيمة المتطرفة في صيغة واحدة وهي:

١. توزيع جامبل (Gumbel)النوع الأول :يستخدم عندما يكون ذيل التوزيع الأصلي للبيانات خفيفاً (مثل التوزيع الطبيعي أو الأسي).
٢. توزيع فريشيه) (Fréchet) النوع الثاني :يستخدم عندما يكون ذيل التوزيع الأصلي للبيانات ثقيلاً (مثل توزيع باريتو أو كوشي)، مما يعني أن القيم المتطرفة الكبيرة لها احتمالية أعلى.
٣. توزيع وايبل (Weibull)النوع الثالث :يستخدم عندما يكون للتوزيع الأصلي حد أعلى أو حد أدنى عند دراسة القيم الدنيا المتطرفة.

فضلاً عما سبق فان توزيع القيمة المتطرفة المعمم هو توزيع احتمالي يستخدم لوصف القيم القصوى (الكبرى أو الصغرى) في البيانات، وغالباً في مجالات الخطر والتأمين كما يستخدم أيضاً لتقدير حجم المطالبات الكبيرة أو الكارثية، كما هو الحال في اختبار جودة التوفيق لقيم المطالبات لتأمين السيارات التكميلي، حيث يمكن استخدامه لنمذجة القيم القصوى للمطالبات، كما يمكن استخدامه لاختبار جودة التوفيق لقيم المطالبات لتأمين السيارات التكميلي بسوق التأمين المصري، ويمكن استخدام توزيع GEV لنمذجة القيم العالية جداً للمطالبات، مما يساعد شركات التأمين على فهم وتحديد احتمالية وقوع مثل هذه الأحداث المتطرفة وتأثيرها المالي المحتمل، وبالتالي تسعير وثائق التأمين بشكل أدق وتحديد احتياطيات كافية. كما يمكن التعبير عن التوزيع بثلاثة معالم:

دالة كثافة الاحتمال لتوزيع القيمة المتطرفة المعمم (هرمز، أمير حنا، ١٩٩٠)

Probability Density Function (PDF):

$$f(x;\mu,\sigma,k)=\{\frac{1}{\sigma}(1+k\frac{x-\mu}{\sigma})^{-1/k-1}\exp(-(1+k\frac{x-\mu}{\sigma})^{-1/k}),\ K\neq0\ \&\ 1+k\frac{x-\mu}{\sigma}>0$$

$$f(x;\mu,\sigma,k)=\frac{1}{\sigma}\exp(-\frac{x-\mu}{\sigma})\ \exp(-\exp(-\frac{x-\mu}{\sigma}))\ ,\ K=0$$

- معلمة الشكل:(shape parameter, K)
- معلمة الموقع :(location parameter, μ) تحدد موقع مركز التوزيع.
- معلمة المقياس :(scale parameter, σ) تحدد مدى انتشار التوزيع، ويجب أن تكون σ>0.

٣. اختبار جودة المطابقة لقيم المطالبات بعد حذف المشاهدة الثانية

بهدف تحديد التوزيع الاحتمالي الأنسب لبيانات حجم التعويضات بعد حذف المشاهدة الثانية، تم استخدام برنامج EasyFit لتطبيق اختبار كولموجوروف–سميرنوف، وقد فحص هذا الاختبار مدى توافق البيانات مع توزيع نظري محدد، تم ذلك لاختبار الفرضيات الإحصائية المتعلقة بانتماء البيانات لتوزيع معين من عدمه، ويجري هذا التحليل وفقاً للفرضية التالية:

الفرض العدمي (الفرض الصفري) H0: البيانات تتبع التوزيع النظري المختار (ويكبي Wakeby)

الفرض البديل H1: البيانات لا تتبع التوزيع النظري المختار (ويكبيWakeby)

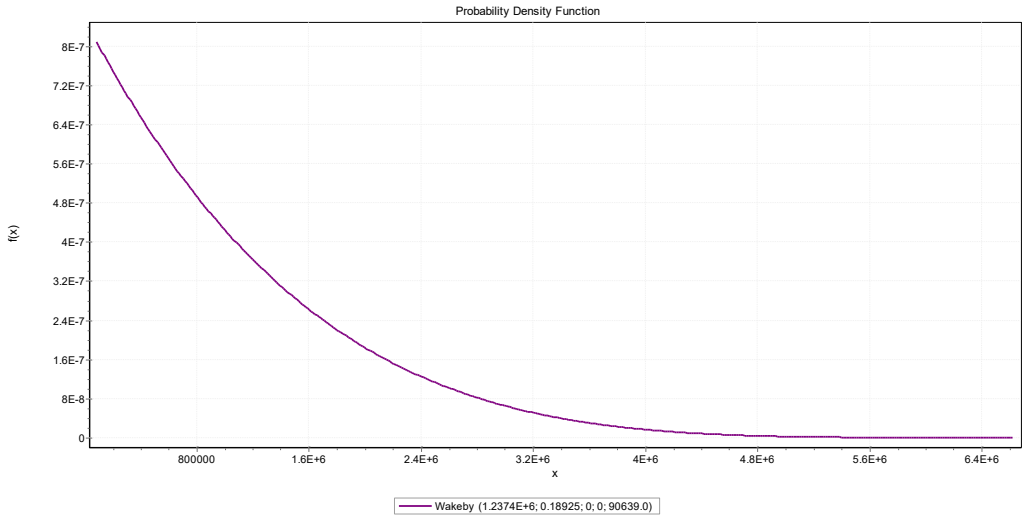
وبإدخال البيانات الأصلية الي برنامج (EasyFit) وجد أن البيانات تتبع توزيع ويكبي Wakeby Distribution: من خلال نتائج الجدول رقم (٥)، حيث بلغت قيمة P. Value جميعها أكبر من ٠.٠٥ لجميع مستوي المعنوية، وبالتالي نقبل الفرض العدمي القائل بأن البيانات تتبع توزيع ويكبي.

جدول رقم (٥): اختبار جودة التوفيق لتوزيع توزيع ويكبي باستخدام اختبار Kolmogorov–Smirnov

Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size Statistic P-Value Rank	22 0.09422 0.97936 1				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.22115	0.25283	0.28087	0.31394	0.33666
Reject?	No	No	No	No	No

المصدر: نتائج برنامج EasyFit

شكل رقم (٥): يبين دالة كثافة الاحتمال لتوزيع ويكبي



المصدر: نتائج برنامج EasyFit

ومن خلال نتائج برنامج EasyFit اتضح أن المعالم الخمسة لتوزيع لتوزيع ويكبي هي: β =0.18925 & γ = 0 & α=1.2374E+6 δ=0 ، ξ=90639.0 ، وعليه فان القيمة المتوقعة Mean=1.1311E+6 لتوزيع ويكبي. وبالتالي خصائص التوزيع هي:

القيمة المتوقعة	Mean =1.1311E+6
التباين	Variance =7.8537E+11
الانحراف المعياري	St.Dev.= 8.8621E+5
معامل الاختلاف	Coef. Of Var. = 0.78347
معامل الالتواء	Skewness =1.2144
معامل التفرطح	Kurtosis =1.3275

المصدر: نتائج برنامج EasyFit

توزيع ويكبي :Wakeby Distribution

توزيع ويكبي هو توزيع احتمالي مستمر يتميز بوجود خمس معاملات وهو ما يميز هذا التوزيع بشكل أساسي هو أنه يعرف عن طريق دالة الكمية (Quantile Function) الخاصة به، بدلاً من دالة الكثافة الاحتمالية (PDF) بشكل مباشر بسبب وجود خمس معاملات، حيث يتمتع توزيع ويكبي بمرونة عالية جداً في تمثيل أشكال متنوعة من البيانات. وهذا يجعله مفيداً بشكل خاص في نمذجة البيانات في مجالات عدة:

دالة الكمية : Quantile Function

عادة ما يعرف توزيع ويكبي بدالة الكمية التالية، والتي تعطي قيمة المتغير العشوائي x عند احتمال F ولا تتجاوز مدي معين وهو (:$0 \le F \le 1$)

$$x(F) = \mu + \alpha / \beta \left[1-(1-F)^{\beta}\right] - \gamma / \delta \left[1-(1-F)^{-\delta}\right]$$

- μ معلمة الموقع (Location Parameter) ، وهو عدد حقيقي.
- α ، γ معلمتا القياس (Scale Parameters) ، وهما أعداد حقيقية موجبة.
- β ، δ معلمتا الشكل (Shape Parameters) ، وهما أعداد حقيقية موجبة.

في بعض الأحيان يتم استخدام صيغة أخرى لدالة الكمية بمعاملات مختلفة، ويعد توزيع ويكبي هو أداة قوية لنمذجة مجموعات البيانات المتنوعة بسبب مرونته العالية، ويعرف

بشكل أساسي بدالة الكمية الخاصة به ويتميز بمعاملاته الخمسة التي تتحكم في موقعه ومقياسه وشكله.

٤. اختبار جودة المطابقة لقيم المطالبات بعد حذف المشاهدة الثالثة

سعياً لتحديد التوزيع الاحتمالي الأمثل لبيانات حجم التعويضات، عقب استبعاد المشاهدة الثالثة، تم توظيف برنامج EasyFit لإجراء اختبار كولموجوروف–سميرنوف، وقد استهدف هذا الاختبار تقييم مدى توافق البيانات مع عدد من التوزيعات النظرية، وذلك من خلال اختبار الفرضيات الإحصائية المتعلقة بانتماء البيانات لتوزيع معين من عدمه، وفق الفرضية الصفرية التي تنص على أن البيانات تتبع التوزيع المحدد مقابل الفرضية البديلة التي تنفي ذلك، والفرض الاحصائي يتمثل في: –

الفرض العدمي (الفرض الصفري) H0: البيانات تتبع التوزيع النظري المختار (ويكبي Wakeby)

الفرض البديل H1: البيانات لا تتبع التوزيع النظري المختار (ويكبيWakeby)

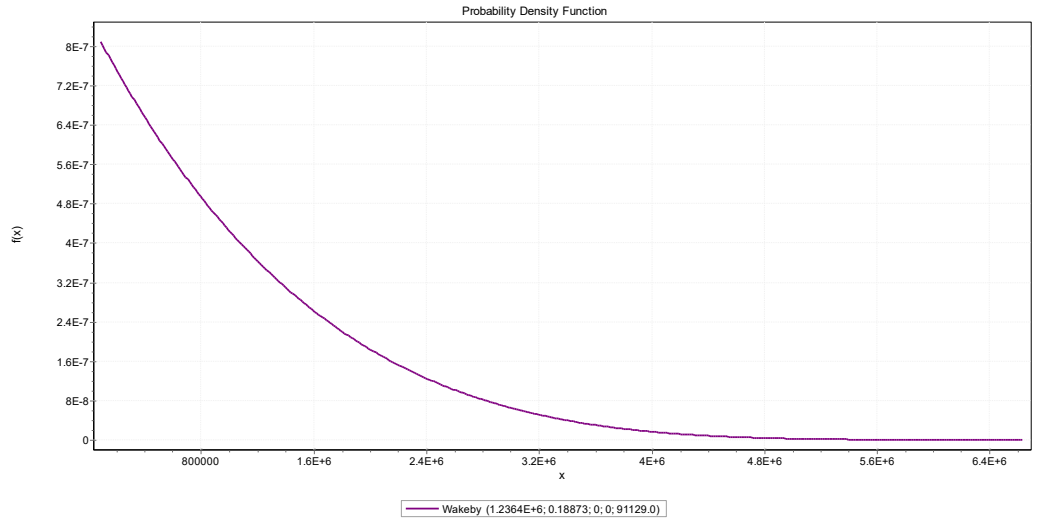
وبإدخال البيانات الأصلية الي برنامج (EasyFit) وُجد أن البيانات تتبع توزيع ويكبي Wakeby Distribution: من خلال نتائج الجدول رقم (٦)، حيث بلغت قيمة P. Value جميعها أكبر من ٠.٠٥ لجميع مستوي المعنوية، وبالتالي نقبل الفرض العدمي القائل بأن البيانات تتبع توزيع ويكبي.

جدول رقم (٦): اختبار جودة التوفيق لتوزيع توزيع ويكبي باستخدام اختبار Kolmogorov–Smirnov

Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size Statistic P-Value Rank	22 0.09446 0.97884 1				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.22115	0.25283	0.28087	0.31394	0.33666
Reject?	No	No	No	No	No

المصدر: نتائج برنامج EasyFit

شكل رقم (٦): يبين دالة كثافة الاحتمال لتوزيع ويكبي



المصدر: نتائج برنامج EasyFit

ومن خلال نتائج برنامج EasyFit اتضح أن المعالم الخمسة لتوزيع ويكبي هي: –

α=1.2364E+6 & γ = 0 & β =0.18873

ξ=91129.0 ، δ=0 ،

وعليه فان القيمة المتوقعة Mean= 1.1312E+6 لتوزيع ويكبي. وبالتالي خصائص التوزيع هي:

القيمة المتوقعة	Mean = 1.1312E+6
التباين	Variance = 7.8534E+11
الانحراف المعياري	St.Dev.= 8.8619E+5
معامل الاختلاف	Coef. Of Var. = 0.7834
معامل الالتواء	Skewness = 1.2159
معامل التفرطح	Kurtosis = 1.3338

المصدر: نتائج برنامج EasyFit

٥. اختبار جودة المطابقة لقيم المطالبات بعد حذف المشاهدة الرابعة

بهدف تحديد التوزيع الاحتمالي الأمثل لبيانات حجم التعويضات بعد استبعاد المشاهدة الرابعة، تم استخدام برنامج EasyFit لإجراء اختبار كولموجوروف–سميرنوف. يهدف هذا الاختبار إلى تقييم مدى توافق البيانات مع مجموعة من التوزيعات الاحتمالية النظرية، من خلال اختبار الفرضيات الإحصائية التالية:

الفرض العدمي (الفرض الصفري)H0 : البيانات تتبع التوزيع النظري المختار (القيمة المتطرفة المعمم)

الفرض البديل H1: البيانات لا تتبع التوزيع النظري المختار (القيمة المتطرفة المعمم).

وبإدخال البيانات الأصلية الي برنامج (EasyFit) وجد أن البيانات تتبع توزيع ((القيمة المتطرفة المعمم) من خلال نتائج الجدول رقم (٧)، حيث بلغت قيمة P.P. Value جميعها أكبر من ٠.٠٥ لجميع مستوي المعنوية، وبالتالي نقبل الفرض العدمي القائل بأن البيانات تتبع توزيع (القيمة المتطرفة المعمم).

جدول رقم (٧): اختبار جودة التوفيق لتوزيع توزيع القيمة المتطرفة المعمم باستخدام اختبار Kolmogorov-Smirnov

Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size Statistic P-Value Rank	22 0.09681 0.97344 1				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.22115	0.25283	0.28087	0.31394	0.33666
Reject?	No	No	No	No	No

المصدر: نتائج برنامج EasyFit

ومن خلال نتائج برنامج EasyFit اتضح أن معالم توزيع القيمة المتطرفة المعمم هي μ=6.9741E+5 & σ=6.0429E+5 & k=0.12402، وعليه فان القيمة المتوقعة Mean= 1.1301E+6 لتوزيع القيمة المتطرفة المعمم، وبالتالي خصائص التوزيع هي:

القيمة المتوقعة	Mean =1.1302E+6
التباين	Variance = 8.8658E+11
الانحراف المعياري	St.Dev.= 9.4158E+5
معامل الاختلاف	Coef. Of Var. = 0.83321
معامل الالتواء	Skewness = −2.1773
معامل التفرطح	Kurtosis = 11.013

المصدر: نتائج برنامج EasyFit

٦- اختبار جودة المطابقة لقيم المطالبات بعد حذف المشاهدة الخامسة

بهدف تحديد التوزيع الاحتمالي الأمثل لبيانات حجم التعويضات بعد استبعاد المشاهدة الخامسة، تم استخدام برنامج EasyFit لإجراء اختبار كولموجوروف–سميرنوف، ويهدف هذا الاختبار إلى تقييم مدى توافق البيانات مع مجموعة من التوزيعات الاحتمالية النظرية، من خلال اختبار الفرضيات الإحصائية التالية:

الفرض العدمي (الفرض الصفري) H0: البيانات تتبع التوزيع النظري المختار توزيع وايبل

الفرض البديل H1: البيانات لا تتبع التوزيع النظري المختار توزيع وايبل

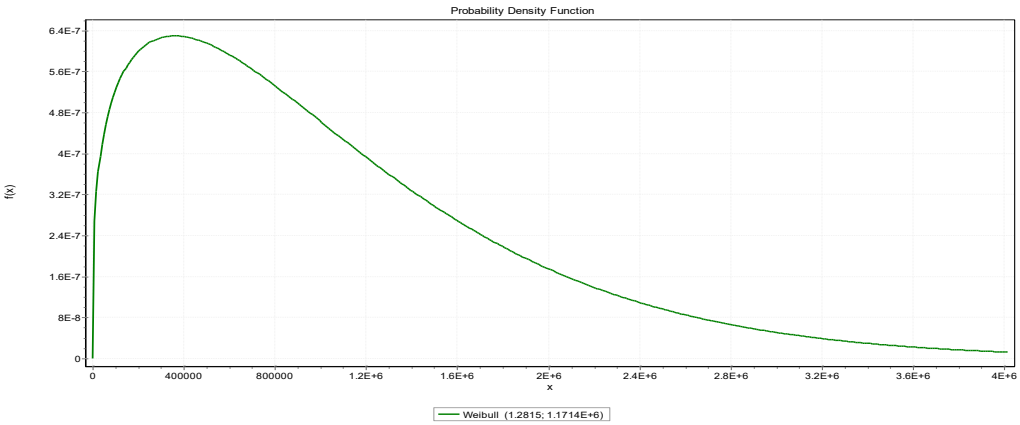
وبإدخال البيانات الأصلية الي برنامج (EasyFit) وجد أن البيانات تتبع توزيع وايبل من خلال نتائج الجدول رقم (٨)، حيث بلغت قيمة P. Value جميعها أكبر من ٠.٠٥ لجميع مستوي المعنوية، وبالتالي نقبل الفرض العدمي القائل بأن البيانات تتبع توزيع (القيمة المتطرفة المعمم).

جدول رقم (٨): اختبار جودة التوفيق لتوزيع توزيع وايبل باستخدام اختبار Kolmogorov–Smirnov

Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size Statistic P-Value Rank	22 0.1052 0.94692 6				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.22115	0.25283	0.28087	0.31394	0.33666
Reject?	No	No	No	No	No

المصدر: نتائج برنامج EasyFit

شكل رقم (٧) يبين دالة كثافة الاحتمال لتوزيع وايبل



المصدر: نتائج برنامج EasyFit

ومن خلال نتائج برنامج EasyFit اتضح أن معالم توزيع وايبل هي α=1.2815 β=1.1714E+6 s=6.0429E+5 &، $\gamma = 0$ وعليه فان القيمة المتوقعة Mean= 1.0851E+6 لتوزيع وايبل. وبالتالي خصائص التوزيع هي:

القيمة المتوقعة	Mean = 1.0851E+6
التباين	Variance = 7.2798E+11
الانحراف المعياري	St.Dev.= 8.5322E+5
معامل الاختلاف	Coef. Of Var. = 0.78628
معامل الالتواء	Skewness = 1.376
معامل التفرطح	Kurtosis = 2.5627

المصدر: نتائج برنامج EasyFit

توزيع وايبل Weibull distribution

ينسب هذا التوزيع إلى الفيزيائي السويديwaloddi Weibull الذي استخدم هذا التوزيع عام ١٩٣٩ في دراسة خصائص العدد المنتجة صناعيا، كما أن هذا التوزيع له استخدامات مهمة في موضوع الرقابة علي الجودة (هرمز، أمير حنا، ١٩٩٠)، وكذلك في مجال التأمينات العامة، حيث إن منحني دالته بشكل عام ملتوي جهة اليمين، ودالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع.

$$f(x) = (\beta x^{\beta-1} / \eta^{\beta}) e^{-(x/\eta)^{\beta}}$$

ودالة التوزيع:

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\eta)^{\beta}}$$

وأهم خصائصه:

$$Mean = \eta\Gamma(1+1/\beta)$$

$$\text{var} = \eta^2\left[\Gamma(\beta+2)/\beta\right] - (\Gamma\left[\Gamma(\beta+1)/\beta\right])^2$$

وعند وضع $\beta=1$ يؤول توزيع وايبل إلى التوزيع الأسي أي أن التوزيع الأسي هو حالة خاصة من توزيع وايبل (Michael,2001)

$$f(x) = (x/\eta)e^{-(x/\eta)}$$

٧. اختبار جودة المطابقة لقيم المطالبات بعد حذف المشاهدة السادسة الي المشاهدة الثالثة والعشرين.

يمكن تلخيص أفضل التوزيعات الاحتمالية من حيث مؤشر الاحتمال المشاهد Value، والقيمة المتوقعة، والتباين لكل توزيع لباقي حالات الحذف للمشاهدات.

جدول رقم (٩): اختبار جودة التوفيق للتوزيعات الاحتمالية باستخدام اختبار Kolmogorov–Smirnov

حذف المشاهدة	اسم التوزيع	الاحتمال المشاهد P.value	القيمة المتوقعة	المعالم
السادسة	القيمة المتطرفة المعمم Gen. Extreme Valu e	0.96189	1.1272E+6	k=0.12133 & σ=6.0864E+5 & μ=6.9347E+5
السابعة	ويكبي Wakeby	0.92945	1.1226E+6	α=1.2669E+6 & β=0.19892 & γ=0& δ=0 & ξ=65918.0
الثامنة	وايبل Weibull	0.88322	1.0761E+6	α=1.2228 & β=1.1494E+6
التاسعة	بيتا Beta	0.97677	1.0994E+6	α_1=0.42492& α_2=0.88283 a=2.1097E+5& b=2.9453E+6
العاشرة	كامبل للحد الأقصى Gumbel Max	0.87086	1.1082E+6	σ=6.7578E+5 & μ=7.1816E+5

الحادي عشر	بيتا Beta	0.97523	1.0991E+6	α_1=0.423 & α_2=0.8793 a=2.1097E+5& b=2.9453E+6
الثاني عشر	بيتا Beta	0.97093	1.0983E+6	α_1=0.41862 α_2=0.87139 a=2.1097E+5 b=2.9453E+6
الثالث عشر	كامبل للحد الأقصى Gumbel Max	0.83876	1.0985E+6	σ=6.7834E+5 & μ=7.0696E+5
الرابع عشر	جاما Gamma	0.81051	1.0990E+6	α=1.596 & β=6.8858E+5
الخامس عشر	اللوغاريتم الطبيعي Lognormal	0.7631	1.1292E+6	σ=0.86757 & μ=13.561
السادس عشر	بيتا Beta	0.95421	1.0941E+6	α_1=0.40742 α_2=0.85405 a=2.1097E+5 b=2.9453E+6
السابع عشر	باريتو Gen. Pareto	0.86131	1.0790E+6	k=-0.10841 & σ=1.1226E+6 & μ=66205.0
الثامن عشر	بيتا Beta	0.92282	1.0777E+6	α_1=0.40663 α_2=0.87616 a=2.1097E+5 b=2.9453E+6
التاسع عشر	ويكبي Wakeby	0.91237	1.0501E+6	α=1.0335E+6 β=0.07386 γ=0 δ=0 ξ=87706.0
العشرين	ويكبي Wakeby	0.92045	1.0433E+6	α=1.0233E+6 β=0.07433 γ=0 δ=0 ξ=90781.0
الحادي والعشرين	باريتو Gen. Pareto	0.92657	1.0329E+6	k=-0.08598 & σ=1.0212E+6 μ=92577.0
الثاني والعشرين	ويكبي Wakeby	0.92298	1.0129E+6	α=1.0497E+6 β=0.13578 γ=0 δ=0 ξ=88736.0
الثالث والعشرين	باريتو Gen. Pareto	0.91596	1.0069E+6	k=-0.16104 & s=1.0706E+6 & m=84778.0

المصدر: نتائج برنامج EasyFit

وفيما يلي فكره مبسطة عن بعض التوزيعات الاحتمالية التي تناسب البيانات لتأمين السيارات التكميلي:

٦. توزيع بيتا Beta distribution

إن هذا التوزيع مشتق من دالة بيتا Beta function أو ما يسمي في بعض الأحيان تكامل بيتا، ويعد هذا التوزيع من التوزيعات الاحتمالية ذات الأهمية البالغة في كثير من التطبيقات مثل الرقابة علي جودة الانتاج وفي مجال رياضيات التأمينات العامة، حيث أن منحني هذه التوزيعات غالباً ما يكون دالة الكثافة لكل توزيع فيه التواء موجب، وتخضع في مجملها للعائلة الأسية (هرمز، أمير حنا، ١٩٩٠ & الصياد، جلال مصطفي، ١٩٨٦). يقال إن المتغير العشوائي المستمر x يتبع توزيع بيتا إذا كانت دالة كثافة الاحتمال هي:

$$f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}.x^{\alpha-1}.(1-x)^{\gamma-1} \qquad , \quad 0\prec x\prec 1$$

ومعلمتا هذا التوزيع هما α , β

وبشكل خاص فان العزم الأول والثاني حول نقطة الأصل هما

$$E(x)=\mu=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$E(x^2)=\frac{\alpha.(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)\ .(\alpha+\beta+1)}$$

وعلية فان تباين توزيع بيتا هو $\sigma^2=E(x^2)-\mu^2=\frac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta+1)}$

وبالتالي فان العزم الرائي حول نقطة الأصل ذي المرتبة r

$$Ex^r=\frac{\Gamma(r+\alpha).\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\alpha+\beta+r)} \quad , \quad r=1,2,...$$

٧. توزيع كامبل للحد الأقصى Gumbel Max distribution

ويسمي في بعض الأحيان توزيع القيمة المتطرفة، أو توزيع كامبل للحد الأقصى (Gumbel Max)، والمعروف أيضاً باسم توزيع القيمة المتطرفة من النوع الأول (Type I Extreme Value distribution)، هو توزيع احتمالي مستمر يستخدم لنمذجة توزيع الحد الأقصى لعدد من العينات من توزيعات مختلفة. غالباً ما يكون هذا مفيداً عند التعامل مع القيم القصوى أو المتطرفة في مجموعة بيانات. كما يستخدم بشكل شائع في الحالات التي تهتم بنمذجة أكبر قيمة يمكن أن تحدث في مجموعة من البيانات المستقلة والمتطابقة التوزيع، وبخاصة إذا كانت

التوزيعات الأصلية ذات ذيول تتناقص بسرعة (مثل التوزيع الطبيعي أو الأسي). تتضمن بعض التطبيقات الشائعة في التأمين عند تقييم المخاطر القصوى والخسائر المالية الكبيرة.

دالة الكثافة الاحتمالية (PDF):

يقال إن المتغير العشوائي x يتوزع وفق دالة توزيع جامبل إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير x هي (هرمز، أمير حنا، ١٩٩٠):

$$f(x;\mu,\beta)=\frac{1}{\beta}\ \exp\left(-\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right.\right.\ -\exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)\left.\right)$$

معالم التوزيع هي:

- **معلمة الموقع :(μ) تحدد مركز التوزيع.**
- **معلمة المقياس :(β) تحدد مدى انتشار التوزيع.**

وعادة ما يكون ملتوياً إلى اليمين، وله ذيل أطول على الجانب الأيمن (للتوزيع الأقصى).

الدالة التوزيعية لتوزيع كامبل للحد الأقصى Cumulative Distribution Function (CDF):

دالة التوزيع التراكمي لتوزيع كامبل للحد الأقصى وخصائص التوزيع هي:

$$F(x;\mu,\beta)=\exp\left(-\exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)\right)$$

القيمة المتوقعة $E[X]=\mu+\beta\gamma$

التباين $Var(X)=\frac{\pi 2}{\sigma}*\ \beta 2$

٨. توزيع اللوغاريتمي الطبيعي The lognormal distribution

يفيد هذا التوزيع عند التعامل مع حجم المطالبات التي تأخذ منحني دالة الالتواء الموجب.

ومعلمتا هذا التوزيع σ, μ

ودالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع هي (هرمز، أمير حنا، ١٩٩٠)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2} \quad ; x \succ 0$$

وخصائصه هي:

$$Mean = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$Var = (e^{2\mu+\sigma^2})(e^{\sigma^2} - 1)$$

والجدير بالذكر أن هذا التوزيع يعد أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة المهمة، والتي تفيد في دراسة موضوع الرقابة علي جودة الإنتاج، وغيرها من الموضوعات التي يدخل الإحصاء فيها كأداة للتحليل في مجال التأمينات العامة (Michael 2001)، كما يستخدم هذا التوزيع للتعامل مع بيانات تأمين الحريق، وتأمين السيارات، وإعادة التأمين، وتوزيع الدخول (Horst Behncke, 2000).

الجدير بالذكر أن توزيع اللوغاريتمي الطبيعي (The lognormal distribution) هو توزيع احتمالي مستمر يستخدم بشكل واسع في مجالات متنوعة بما في ذلك التأمين، كما أن علاقته بالتأمين وتحديداً تأمين السيارات التكميلي تكمن في قدرته على التعامل مع جوانب مطالبات التأمين وتكاليفها، وغالباً ما تكون مبالغ مطالبات التأمين موجبة وملتوية إلى اليمين، حيث توجد العديد من المطالبات الصغيرة وعدد قليل من المطالبات الكبيرة. كما يستخدم في تسعير وثائق التأمين لفهم توزيع مبالغ المطالبات كما يساعد شركات التأمين في تحديد أقساط التأمين المناسبة إذا كانت المطالبات ذات ذيول طويلة (احتمالية وجود مطالبات كبيرة مرتفعة)،

وتحتاج شركات التأمين إلى تقدير الأموال التي يجب الاحتفاظ بها لتغطية المطالبات المستقبلية يمكن أن يساعد التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي في تقدير هذه الاحتياطيات، خاصة بالنسبة للمطالبات التي قد تكون كبيرة.

٩. توزيع باريتو Pareto Distribution

توزيع باريتو له علاقة مهمة بمجال التأمين، وخاصة فيما يتعلق بتحقق الخسائر الكبيرة وتأمين السيارات التكميلي. ويتميز توزيع باريتو بذيله الطويل والثقيل، مما يعني أنه يولي احتمالية أكبر لحدوث قيم متطرفة مقارنة بالتوزيعات الأخرى مثل التوزيع الطبيعي أو الأسي في مجال التأمين غالبا ما يكون لدينا عدد كبير من المطالبات الصغيرة وعدد قليل من المطالبات الكبيرة مثل الكوارث أو الحوادث ذات المسؤولية الكبيرة، وتهتم شركات التأمين بشكل خاص بفهم وتوقع المخاطر الكبيرة التي يمكن أن تؤدي إلى خسائر فادحة، وتوزيع باريتو يساعد في تقدير احتمالية وتكرار هذه الأحداث ذات الخسائر العالية.

دالة الكثافة الاحتمالية:

يقال إن المتغير العشوائي x يتوزع وفق دالة توزيع باريتو إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير x تأخذ الشكل التالي (هرمز أمير حنا، ١٩٩٠):

$$f(x;a,b)=\frac{b}{a}\left(\frac{a}{x\sigma}\right)^{b+1} \qquad x \geq a$$

حيث a,b تمثل معلمتي التوزيع بحيث أن $b>0$ & $a>0$، وبالتالي خصائص التوزيع

القيمة المتوقعة $E[X]=\frac{ab}{b-1}$

التباين $b > 2$ $Var(X)=\frac{a^2 b}{(b-2)(b-1)^2}$

مقارنة بين النماذج الاحتمالية ذات المعلمة الثابتة والنماذج ذات المعلمات المتغيرة

في إطار سعي الدراسة إلى تحديد النموذج الاحتمالي الأنسب لتمثيل بيانات حجم التعويضات، تم اعتماد معيار مربع الخطأ النسبي (Relative Squared Error (RSE) كأداة للمفاضلة بين النماذج ، حيث يتيح هذا المعيار قياس مدى دقة كل نموذج في تقدير التعويضات من خلال

مقارنة متوسط القيم المقدرة مع متوسط البيانات الفعلية ، وتعد قيمة RSE الأقل مؤشرا على جودة التقدير وملاءمة النموذج. ويوضح الجدول التالي نتائج المقارنة بين التوزيعات ذات المعالم الثابتة ونظيرتها ذات المعالم المتغيرة، بما يسهم في دعم قرار اختيار النموذج الأمثل. وسيتم إجراء مقارنة بين التوزيعات الاحتمالية المستخدمة لتقدير حجم التعويضات، وذلك من خلال الاعتماد على معيار مربع الخطأ النسبي، وفقا للصيغة الموضحة التالية (عيسى، ٢٠٠٨) ، والتي تعتمد على متوسط قيم التعويضات في البيانات الأصلية مقارنة بالبيانات الجديدة.

معيار مربع الخطأ النسبي $RSE = \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}$

حيث إن:

$\bar{y}$ متوسط قيم التعويضات للبيانات الأصلية وللبيانات الجديدة

جدول رقم (١٠): المقارنة بين التوزيعات ذات المعلمة الثابتة والنماذج ذات المعلمات المتغيرة

المقارنة	قيمة مربع الخطأ النسبي RSE
التوزيعات الاحتمالية ذات المعلمة الثابتة (للبيانات الاصلية)	0.00120
التوزيعات الاحتمالية ذات المعلمات المتغيرة (للبيانات الجديدة وهي المتوسطات).	0.000186

بالاطلاع على نتائج الجدول رقم (١٠) يتضح أن قيمة مربع الخطأ النسبي (RSE) للنماذج الاحتمالية ذات المعلمات المتغيرة، والمطبقة على المتوسطات الجديدة جاءت أقل بكثير (٠.٠٠٠١٨٦) مقارنة بقيمتها في النماذج ذات المعلمة الثابتة (٠.٠٠١٢٠) المستخدمة مع البيانات الأصلية. ويعكس هذا التفوق الواضح للنماذج ذات المعلمات المتغيرة في قدرتها على تمثيل بيانات حجم التعويضات بصورة أدق وأكثر ملاءمة، وتبرز هذه النتيجة أهمية الاعتماد على النماذج ذات المعلمات المتغيرة في دراسات التأمين، ولا سيما في تقدير حجم الخسائر بقطاع التأمينات العامة، لما توفره من دقة وموثوقية أعلى في النتائج.

تقدير الخسائر لتأمين السيارات التكميلي للسوق المصري:

تعتمد هذه الطريقة على تقدير متوسطات التوزيعات الاحتمالية من خلال تطبيق أسلوب الحذف المتكرر للمشاهدات. إذ يتم في كل مرة حذف مشاهدة واحدة من العينة، ثم تقدير معالم أفضل توزيع احتمالي استنادًا إلى قيمة دالة الاحتمال المشاهد. بعد ذلك، تحسب القيمة المتوقعة الناتجة ضمن البيانات الأصلية، ويعاد تقدير متوسط التوزيع من جديد. تتكرر هذه الخطوات بشكل متتابع، بحيث يتم في كل مرة استخدام المتوسطات المقدرة لتكوين توزيع احتمالي جديد. وبهذه الطريقة يمكن الحصول على (m) من التوزيعات الاحتمالية ذات معالم متغيرة، والتي تعكس أثر حذف المشاهدات وتقدير القيم المتوقعة للتوزيع الاحتمالي.

اختبار جودة المطابقة للقيمة المتوقعة (المعلمات المتغيرة):

لغرض تحديد التوزيع الاحتمالي الأنسب لبيانات القيمة المتوقعة لحجم التعويضات بعد حذف المشاهدات من الاولي حتى الثالثة والعشرين، تم تطبيق اختبار كولموجوروف–سميرنوف باستخدام برنامج EasyFit حيث تم تطابق البيانات للقيم المتوقعة لمعالم المعلمات المتغيرة مع عدد من التوزيعات الاحتمالية النظرية .وقد تم ذلك من خلال اختبار الفرضيات الإحصائية التالية:

الفرض العدمي :(H_0) البيانات تتبع التوزيع النظري المحدد (توزيع وايبل)

الفرضية البديلة :(H_1) البيانات لا تتبع التوزيع النظري المحدد (توزيع وايبل)

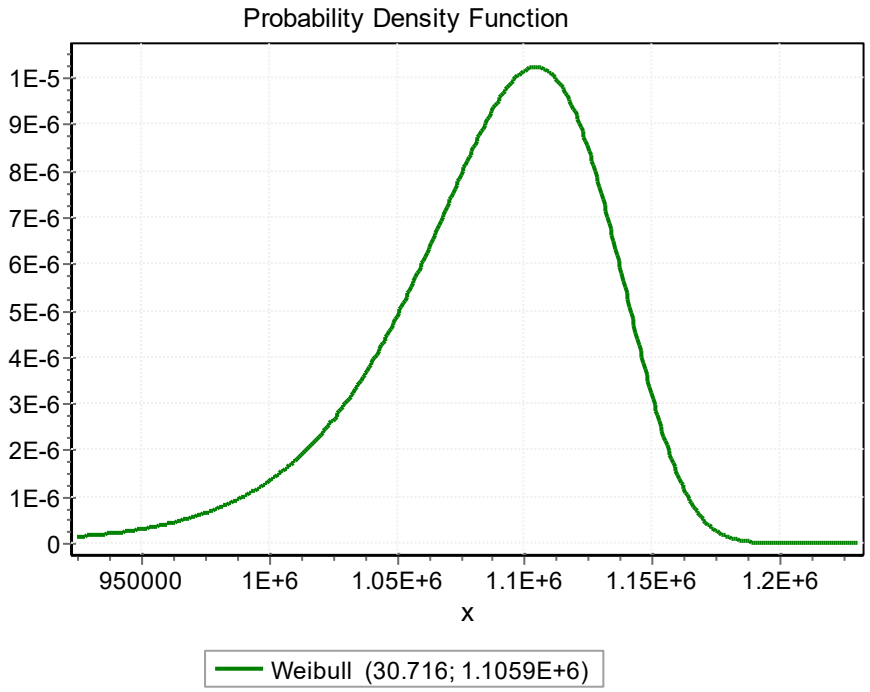
عند تحليل البيانات باستخدام برنامجEasyFit ، أشارت النتائج الموضحة في الجدول رقم (١١) إلى أن البيانات تتوافق إحصائيا توزيع وايبل .حيث كانت قيمة الاحتمالية–P) (valueلجميع اختبارات كولموجوروف–سميرنوف أكبر من مستوى المعنوية البالغ ٠٥٠.، مما أدى إلى قبول الفرضية الصفرية التي تنص على أن البيانات تتبع توزيع وايبل.

جدول رقم (١١): اختبار جودة التوفيق لتوزيع توزيع وايبل باستخدام اختبار Kolmogorov–Smirnov

Weibull [#63]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size **Statistic** **P-Value** **Rank**	**23** **0.13524** **0.7449** **2**				
α	**0.2**	**0.1**	**0.05**	**0.02**	**0.01**
Critical Value	**0.21645**	**0.24746**	**0.2749**	**0.30728**	**0.32954**
Reject?	**No**	**No**	**No**	**No**	**No**

المصدر: نتائج برنامج EasyFit

شكل رقم (٨): يبين دالة كثافة الاحتمال لتوزيع وايبل



المصدر: نتائج برنامج EasyFit

ومن خلال نتائج برنامج EasyFit اتضح أن معالم توزيع وايبل a=30.716 & b=1.1059E+6 ، وبالتالي خصائص التوزيع هي: وعليه فان القيمة المتوقعة Mean= 1.0863E+6 لتوزيع وايبل.

القيمة المتوقعة	Mean = 1.0863E+6
التباين	Variance = 1.9658E+9
الانحراف المعياري	St.Dev.= 44338.0
معامل الاختلاف	Coef. Of Var. = 0.04082
معامل الالتواء	Skewness = 0.95717
معامل التفرطح	Kurtosis = 1.6002

المصدر: نتائج برنامج EasyFit

التنبؤ بقيم الخسائر لتأمين السيارات التكميلي للسوق المصري خلال الفترات القادمة من عام (2024-2030):

شهد سوق التأمين المصري نمواً ملحوظاً في قطاع تأمين السيارات التكميلي مما يستدعي ضرورة فهم وتوقع قيم الخسائر المستقبلية لهذا السوق، حيث تهدف هذه الدراسة إلى التنبؤ بقيم الخسائر لتأمين السيارات التكميلي في السوق المصري خلال الفترة الزمنية ٢٠٢٤-٢٠٣٠. وقد تم استخدام منهجية تعتمد على التوزيعات الاحتمالية ذات المعالم المتغيرة، حيث يتم تحديث معالم التوزيع بناءً على التوقعات المتتالية لبيانات المتوسطات.

جدول رقم (١١): التنبؤ بقيم الخسارة لتأمين السيارات التكميلي من عام 2024-2030

السنوات	التوزيع	*P.value*	القيمة المتوقعة بالألف جنية
2024	وايبل Weibull	0.7449	1.0863E+6
2025	توزيع لوغاريتمي بيرسون النوع الثالث Log-Pearson 3	0.86357	1.0878E+6
2026	توزيع لوغاريتمي لوجستي بثلاثة معلمات Log-Logistic (3P)	0.88413	1.0895E+6
2027	توزيع لوغاريتمي لوجستي بثلاثة معلمات Log-Logistic (3P)	0.77189	1.0877E+6
2028	توزيع وايبل ثلاثة معلمات Weibull (3P)	0.58094	1.0824E+6
2029	توزيع لوغاريتمي لوجستي بثلاثة معلمات Log-Logistic (3P)	0.6337	1.0858E+6
2030	توزيع وايبل ثلاثة معلمات Weibull (3P)	0.57535	1.0804E+6

المصدر: نتائج برنامج EasyFit

يتضح من الجدول (١١) أن توزيعي Log-Logistic (3P)، Weibull (3P) هما الأكثر ملاءمة لتقدير خسائر تأمين السيارات التكميلي خلال الفترة المتوقعة. كما

تشير القيم المتوقعة إلى استقرار نسبي مع ميل طفيف للانخفاض بداية من عام ٢٠٢٨ مع تذبذب محدود في القيم المتوقعة مما يدعم مصداقية النماذج المختارة.

وفيما يلي نبذة مختصرة عن هذين التوزيعين:

توزيع وايبل ذو الثلاثة معلمات Weibull (3-Parameter) Distribution

يعد توزيع وايبل من التوزيعات الاحتمالية المرنة والمستخدمة على نطاق واسع في مجالات التأمين والهندسة والموثوقية، ويتميز بقدرته على تمثيل سلوك البيانات سواءً كانت متزايدة أو متناقصة أو ثابتة المخاطر، كما يستخدم في التأمين لتقدير توزيعات الخسائر التي قد تتبع نمطاً متغيراً بمرور الوقت أو وفقا لقيم معينة، كما يعد من التوزيعات المرنة في تمثيل بيانات تميل إلى الزيادة أو النقصان أو الثبات في معدل حدوث الخسائر، ويعد نموذجاً مناسب لتوزيعات البيانات الموجبة.

دالة كثافة الاحتمال :Probability Density Function (PDF)

يمكن التعبير عن دالة كثافة الاحتمال (pdf) لهذا التوزيع بالشكل التالي: -

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

أهم معالم توزيع وايبل ذو الثلاثة معلمات

- معلمة القياس Scale parameter $\alpha > 0$
- معلمة الشكل Shape parameter $\beta > 0$
- معلمة الموقع Location parameter γ

دالة التوزيع التراكمي The cumulative distribution function (CDF) is

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

الخصائص الإحصائية الرئيسية لتوزيع ويبل المتوسط، والوسيط، والمنوال، والتباين المكون من ٣ معلمات هي: -

Mean	$\gamma + \alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$
Median	$\gamma + \alpha(\ln 2)^{1/\beta}$
Mode	$\gamma + \alpha\left(1-\frac{1}{\beta}\right)^{1/\beta}$ if $\beta > 1$
Variance	$\alpha^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right)^2\right]$

توزيع لوغاريتمي لوجستي بثلاثة معلمات Log-Logistic (3P)

يعد توزيع Log-Logistic (3P) من التوزيعات الاحتمالية المستمرة المستخدمة بكثرة في مجالات التأمين وتحليل المخاطر ودراسات الموثوقية خاصة في الحالات التي تتسم فيها البيانات بانحراف موجب ولها حد أدنى. كما يستخدم في تقدير خسائر التأمين خصوصا في الفروع التي تتسم بانحراف موجب ووجود حد أدنى للخسائر ملائم لتحليل فترات الحياة، ومعدلات التعويضات، ومبالغ الخسائر في التأمينات العامة.

دالة كثافة الاحتمال :Probability Density Function (PDF)

يمكن التعبير عن دالة كثافة الاحتمال (pdf) لهذا التوزيع بالشكل التالي: -

$$f(x)= \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{X-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1}}{\left[1+\left(\frac{X-\gamma}{\alpha}\right)\beta\right]^2} \quad , \; X > \gamma$$

أهم معالم توزيع لوغاريتمي لوجستي بثلاثة معلمات:

- **معلمة القياس Scale parameter $\alpha > 0$**
- **معلمة الشكل Shape parameter $\beta > 0$**
- **معلمة الموقع Location parameter γ**

الخصائص الإحصائية الرئيسية لتوزيع لوغاريتمي لوجستي المتوسط، التباين المكون من ٣ معلمات هي: –

القيمة المتوقعة لتوزيع لوغاريتمي لوجستي بثلاثة معلمات Log-Logistic (3P)

$$E[X]=\gamma+\lambda\Gamma(1)\Gamma(1+1/\alpha)\Gamma(1-1/\alpha)$$

التباين لتوزيع لوغاريتمي لوجستي بثلاثة معلمات Log-Logistic (3P)

$$Var(X)=\lambda 2[\Gamma(1)\Gamma(1+2/\alpha)\Gamma(1-2/\alpha)-(\Gamma(1)\Gamma(1+1/\alpha)\Gamma(1-1/\alpha))2]$$

النتائج والتوصيات:

أولاً: النتائج:

١- يعد فرع تأمين السيارات التكميلي أحد ركائز تأمينات الممتلكات والمسؤولية في السوق المصري، لما له من أهمية نسبية في مكونات محفظة شركات تأمينات الممتلكات، ودوره في الحفاظ على الثروة القومية ودعم نظام الائتمان الذي تموله البنوك.

٢- لقد تعاظم دور هذا النوع من التأمين كوسيلة لمواجهة الأخطار التي قد تتعرض لها المركبات نتيجة لارتفاع قيمتها بأنواعها المختلفة.

٣- مثلت نسبة أقساط فرع تأمين السيارات التكميلي حوالي 32% من اجمالي سوق تأمينات الممتلكات والمسؤولية، وكذلك تبلغ حجم تعويضاته 33.3% من إجمالي الأقساط المسددة عن العمليات المباشرة، وتبلغ متوسط حصته السوقية حوالي 20% من حصة السوق المصري عام ٢٠٢٣ الأمر الذي يتطلب مزيداً من الاهتمام بهذا الفرع.

٤- اتسمت نتائج تأمين السيارات التكميلي بتزايد معدلات خسائرها حيث تنحصر ما بين 48.4% و 94.2% بمتوسط 67% خلال فترة الدراسة، كما يلاحظ وجود عجز تأميني في عدة سنوات خلال هذه الفترة، مما يعكس وجود فجوة بين الأقساط

المحصلة والتعويضات المدفوعة، مما استلزم تحليل أسباب هذه الظاهرة التأمينية غير المرغوبة.

٥- تلجأ شركات إعادة التأمين في الخارج إلى تخفيض عمولات شركات التأمين فى هذا الفرع التأميني بسبب خسائره.

٦- تتسم التوزيعات الاحتمالية متغيرة المعلمات بالتغير بناءً على متغيرات أخرى أو بمرور الزمن، وهذا يسمح للنموذج بالتكيف مع التغيرات في بيانات الخسائر التي قد تكون ناجمة عن عوامل اقتصادية، تنظيمية، أو تغييرات في سلوك المؤمن عليهم.

٧- تم إيجاد جودة التوفيق للبيانات الجديدة(المتوسطات) واختيار التوزيع ذات المعالم المتغيرة المناسب لتأمين السيارات التكميلي، وتتم المقارنة بين النموذج ذي المعالم المتغيرة المقترح والتوزيعات ذات المعلمات الثابتة من خلال دقة التنبؤ لمقياس مربع الخطأ النسبيRelative squared error (RSE).

٨- أظهرت نتائج الدراسة التطبيقية لهذا البحث التفوق الواضح للنماذج ذات المعلمات المتغيرة في قدرتها على تمثيل بيانات حجم التعويضات بصورة أدق وأكثر ملاءمة، وتبرز هذه النتيجة أهمية الاعتماد على النماذج ذات المعلمات المتغيرة في دراسات التأمين، ولا سيما في تقدير حجم الخسائر بقطاع التأمينات العامة، لما توفره من دقة وموثوقية أعلى في النتائج.

٩- أظهرت نتائج الدراسة التطبيقية أن توزيعي Log-Logistic (3P) ، Weibull (3P) هما الأكثر ملاءمة لتقدير خسائر تأمين السيارات التكميلي خلال الفترة المتوقعة. كما تشير القيم المتوقعة إلى استقرار نسبي مع ميل طفيف للانخفاض بداية من عام ٢٠٢٨ مع تذبذب محدود في القيم المتوقعة مما يدعم مصداقية النماذج المختارة.

ثانياً: التوصيات:

١- يوصي الباحث بأهمية استخدام التوزيعات الاحتمالية متغيرة المعلمات باعتبارها أداة قوية لتحسين تقدير توزيعات الخسائر في التأمين التكميلي، مما يؤدي إلى قرارات أكثر استنارة وفعالية في عملية التسعير، التحوط، وإدارة المخاطر.

٢- استخدام توزيعي Log-Logistic (3P)، Weibull (3P) باعتبارهما هما الأكثر ملاءمة لتقدير خسائر تأمين السيارات التكميلي خلال الفترة المتوقعة. كما تشير القيم المتوقعة إلى استقرار نسبي مع ميل طفيف للانخفاض بداية من عام ٢٠٢٨ مع تذبذب محدود في القيم المتوقعة مما يدعم مصداقية النماذج المختارة.

٣- استخدام نماذج التوزيعات الاحتمالية ذات المعالم المتغيرة عند تقدير خسائر التأمين التكميلي، نظراً لما تتمتع به هذه النماذج من قدرة على استيعاب التقلبات والتغيرات في سلوك بيانات الخسائر بمرور الزمن مما يعزز دقة التقديرات المالية والاكتوارية.

٤- ضرورة تكرار عملية توفيق النماذج الإحصائية بشكل دوري مع كل مجموعة بيانات جديدة يتم توفرها، بهدف متابعة التغيرات التي قد تطرأ على حجم التعويضات ومستويات الخسائر في كافة فروع التأمينات العامة، بما يساهم في تحسين كفاءة عمليات التسعير وإدارة المخاطر.

قائمة المراجع:

أولاً: المراجع العربية:

البلقيني، محمد توفيق إسماعيل، (٢٠٠١)، استخدام نظرية الفئات الفازية في تقدير حجم المطالبات في التأمين التكميلي على السيارات، *المجلة المصرية للدراسات التجارية*، كلية التجارة – جامعة المنصورة، المجلد ٢٥، عدد٢، ص ص ١-٢٥.

البلقيني، محمد توفيق إسماعيل والمعداوي، محمد مسعد، (٢٠١٠). نموذج متعدد المتغيرات لتوفيق بيانات مطالبات تأمين السيارات التكميلي (دراسة تطبيقية). *المجلة المصرية للدراسات التجارية*، مج ٣٤, ع٣.

الحسيني، عصام خلف، "الاحتمالات والتوزيعات وتطبيقاتها في أكثر من متغير"، جامعة أسيوط ، كلية العلوم، الطبعة الثانية، 2002.

الخولي، حسني أحمد، (٢٠٠٢). استراتيجية تخفيض مطالبات السيارات بشركات التأمين دراسة تطبيقية على سوق التأمين الأردني (الجزء الأول). *نشرة رسالة التأمين* – الأردن، مج ٥, ع ٢، ص ص ٢٢ – ٢٥.

الخواجة، حامد عبد القوي محمد، (٢٠١٢). " نموذج إحصائي لتحديد حد الاحتفاظ الأمثل لشركات التأمين السعودي: دراسة تطبيقية "، *مجلة البحوث المالية والتجارية*: جامعة بورسعيد – كلية التجارة – مصر.

الخواجة، حامد عبد القوي محمد، مشعال، محمود عبد العال، (٢٠١٧). " استخدام التوزيعات الاحتمالية ذات المعالم المتغيرة في تقديرات توزيعات الخسارة لتأمين الوحدات البحرية: دراسة تطبيقية"، *مجلة البحوث المالية والتجارية*: جامعة بورسعيد – كلية التجارة – مصر.

الخواجة، حامد عبد القوي محمد، (٢٠١٩). نحو نموذج احتمالي خطي لتقدير حجم التعويضات لتأمين السيارات التكميلي في سوق التأمين المصري. *مجلة البحوث المالية والتجارية*، ع ٤، ٣٢١ – ٣٧٢.

الدش، عفاف على، (٢٠٠٦). "*الاستدلال الإحصائي* "، كلية التجارة، جامعة حلوان.

الصياد، جلال مصطفي، (١٩٨٦). "*نظرية الاحتمالات*"، جامعة الملك عبد العزيز، السعودية.

جلال مصطفي الصياد، (١٩٩٣). "*الاستدلال الإحصائي*"، جامعة الملك عبد العزيز، السعودية.

الديب، علي السيد، (١٩٩٢). *تسعير التأمين التكميلي للسيارات الخاصة في ج.م.ع وفقاً للعوامل المؤثرة في درجة الخطر*، رسالة دكتوراه، كلية التجارة – جامعة القاهرة.

حبيب، إيمان محمد، (٢٠٠٤). "*حول خلائط توزيعات باريتو* "، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية العلوم، جامعة أسيوط.

الفقي، السباعي محمد السباعي، (١٩٩١). استخدام نظرية بييز في الاحتمالات: التقدير القبلي والبعدي في التنبؤ بمعدل تكرار المطالبات في التأمين، *المجلة المصرية للدراسات التجارية*، كلية التجارة – جامعة المنصورة، مجلد ١٥، عدد ٦، ص ص ٣٤٩- ٣٦٠.

الفقي، السباعي محمد السباعي، (٢٠٠٢). استخدام تحليل التمايز لتصنيف الأخطار في تأمين السيارات دراسة تطبيقية على سوق التأمين الكويتي، *المجلة المصرية للدراسات التجارية*، كلية التجارة – جامعة المنصورة.

المطرفي، بخيت مرزوق وجاهين، زينهم فكري، (٢٠٠٦). *مقدمة في نظرية الاحتمال* – في أكثر من متغير، مكتبة أنهار العلم، المملكة العربية السعودية.

النحاس، أحمد حمدي عبد المنعم سليمان، أسامة ربيع أمين، .(2022) تسعير وثيقة التأمين البحري أجسام سفن " اللنشات" باستخدام التحليل البيزي للبيانات في سوق التأمين المصري – دراسة كمية .*المجلة العلمية للدراسات والبحوث المالية والإدارية* (1)13 ,

خماس، قيس سبع وعبد الله، ثامر، (٢٠١٣)." استعمال بعض النماذج الاحتمالية المبتورة لدراسة خصائص التعويضات الصحية في شركات التأمين العراقية"، *مجلة العلوم الاقتصادية والادارية*، المجلد 19، العدد 72.

صابر، محمد غازي، (١٩٩٨). إعادة بناء حوادث تصادم السيارات باستخدام الدوال المثلثية. *المجلة المصرية للدراسات التجارية* – مصر، مج ٢٢, ع ١، ص ص ٥٣٩ – ٥٦٣.

عاشور، سمير كامل، (٢٠٠٥). "*الإحصاء باستخدام البرنامج الإحصائي SPSS* "، القاهرة، معهد الدراسات والبحوث الإحصائية.

عطا، محمد محمد وحسانين، علي السيد بخيت، (٢٠٠٦). نموذج كمي لتسعير أخطار المسئولية المدنية بالتطبيق على قطاعات الصناعات المعدنية، *مجلة البحوث التجارية المعاصرة*، كلية التجارة – جامعة سوهاج.

علي، إيمان عماد عبد العليم، (٢٠١٦). تأمين السيارات التكميلي المشاكل والتحديات: دراسة تحليلية *مجلة البحوث التجارية*، مج ٣٨ , ع ٢، ٤٣ – ٧٧.

عيسى، محمود عبد الفتاح. (٢٠٠٨). .نماذج التوزيعات الاحتمالية وتطبيقاتها باستخدام الحاسوب . القاهرة: دار الكتب العلمية للنشر والتوزيع.

مشعال، محمود عبدالعال محمد، (٢٠٢٢). تحليل أخطار الاندماج في شركات التأمين باستخدام نموذج التوزيعات الاحتمالية ذات المعالم المتغيرة، *المجلة المصرية للدراسات التجارية*، مج ٤٦ , ع ٢، ١ – ٤٠.

مصطفى، عبد الحفيظ، (٢٠٠٠)." الاستدلال الإحصائي (١) نظرية التقدير"، مجموعة النيل العربية.

محمد، محمد حسن فايق، (١٩٩٤). دراسة تحليلية لمعدلات الخسارة لتأمين السيارات التكميلي بجمهورية مصر العربية. *المجلة المصرية للدراسات التجارية* – مصر، مج ١٨, ع ١، ص ص ٥٥١ – ٦٠٤.

هاشم، محمد محمود، (٢٠١٩). استخدام التوزيعات الاحتمالية في التنبؤ بالمطالبات بالتطبيق على تأمين لسيارات التكميلي بشركات التأمين المصرية. *مجلة الدراسات المالية والتجارية*، ع ٢.

هرمز، أمير حنا، (١٩٩٠). *"الإحصاء الرياضي"*، جامعة الموصل، العراق.

ثانياً: المراجع الأجنبية:

Al-Zahrani, S. & Smith, J. (2023). Predicting Claim Frequency in Auto Insurance Using Generalized Poisson Regression with Socio-Economic Factors. *Journal of Applied Statistics*, *50*(2), 345-362.

Abu-Zinadah,Hanaa, (2010). "On Mixture of Exponentiated Pareto and Exponential Distribution", *Journal of Applied Science Research* , Vol.6,No.4.

Hon-Shiang Lau, (1986). "An Effective Approach for Estimating the Aggregate Loss of An Insurance Portfolio." *Journal of Risk and Insurance*, vol. 3.

Horst Behncke, (2000). "Insurance Mathematics A European Model", *University of Osnabruck*, 2000.

Hossack, I. B. (1999). "Introductory statistics with applications in general insurance", *Cambridge university press*.

J. David , Cummins, (19993). " Statistical and financial models of insurance pricing and the insurance firm" *The Journal of Risk and insurance* , Vol., 68 , No.2.

Merran, Evans& Nicholas, Hastings and others, (2000)." Statistical Distributions" Third Edition ,*John Wiley& Sons ,Inc*.

J. N. K. Rao, (2009). Jackknife Bootstrap Method for Variance Estimation from Sample Survey Data, *International Journal of Statistical Science*, Vol. 9, (Special Issue).

Mazviona, B. W., Chiduza, T., (2013). The use of statistical distributions to model claims in motor insurance, *International Journal of Business, Economics and Law*, Vol. 3.

Michael A. Bean., (2001). "Probability: the Science of uncertainty with Application to Investments, *Insurance and Engineering, Univ. of Western, Books.*

Nie, H , and Chen, H., (2007). "Lognormal Sum Approximation with Type IV Pearson Distribution", *IEEE Communications Letters*", Vol. 11, NO. 10.

Obiora, H. O. and J. I. Mbegbum, (2012). Jackknife Algorithms for the estimation of logistic regression paramertes, *Journal of Statistical Sciences Research,* Vol. 2, No. .

Saieed F.Ateya &Elham A.Madhagi, (2013). "On multivaiate truncated generalized Cauchy distribution", *Statistical papers* ,Vol.54,No.3,2013.

Tomas A. Aluppa, (1988)."Evaluation of Person Curves as an Approximation of the Maximum probable annual Aggregate Loss." *Journal of Risk and Insurance*, Vol 3, 1988.